Министерство образования и науки

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
„Алтайская государственная педагогическая
академия“

Л.В. Львова

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Барнаул
2012

Львова Л.В. Проективная геометрия: Учебное пособие. — Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2012. — 128 с.

Научный редактор: К.О. Кизбикенов, канд. физ.-мат. наук, доцент (АлтГПА)

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса геометрии для математических и физико-математических факультетов педагогических институтов по разделам "Проективное пространство" и "Основные факты проективной геометрии". Наряду с теоретическим материалом, изложение которого сопровождается многочисленными примерами решения задач, пособие содержит сборник задач.

Адресуется студентам математических факультетов.

Рецензенты - Е.Д. Родионов, профессор, доктор физ-мат. наук АлтГПА
- Г.В. Пышнограй, доктор физ-мат. наук, зав.кафедрой математического анализа АлтГПА

ISBN 5-88210 - 205 - 7

Введение. Краткая историческая справка

Возникновение проективной геометрии как отдельной математической теории связывают с именами французского математика Понселе (1788 - 1867) и немецкого математика фон Штаудта (1798 - 1867), хотя некоторые ее теоремы были получены раньше: теорема Паппа Александрийского в IY в. н.э., теорема Дезарга - французского философа и математика (1593 - 1662). Так, Понселе в работе "Трактат о проективных свойствах фигур"(1822) дает четкое определение проективного свойства фигуры, а фон Штаудт в работе "Геометрия положений "(1847) рассмотрел построение проективной геометрии независимо от метрических понятий.

Мебиус (1790 - 1868) и Плюккер (1801 - 1868), немецкие математики, применили к проективной геометрии аналитические методы. Мебиус впервые вводит систему однородных координат, являющихся частным случаем проективных координат. Плюккер определил проективные и тангенциальные координаты. Наконец, итальянский математик М. Пьери в 1898 г. обосновал введение координат с проективной точки зрения.

Английский математик А. Кэли (1821 - 1895) и немецкий математик Ф. Клейн (1849 - 1925) посвятили свои исследования изучению метрической геометрии на проективной основе. Предложенное ими мероопределение позволило выделить из проективной геометрии евклидову, эллиптическую Римана и гиперболическую Лобачевского геометрии. Их идеи нашли свое завершение в 1872 году в так называемой "Эрлангенской программе лекции, прочитанной Ф. Клейном в университете г. Эрлангейн (Германия) и опубликованной под названием "Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований".

Немецкий математик Д. Гильберт исследовал проблему аксиоматического построения геометрии и создал аксиоматику проективной геометрии.

Русские математики В. Я. Цингер (1836 - 1907) и его последователи К. А. Андреев и А.К. Власов внесли определенный вклад в развитие теории. Так, Андреев (1848 - 1921) изучал многозначные проективные соответствия прямых и пучков, свойства круговых многосторонников. Власов (1868 - 1922) рассматривал проективные и метрические свойства линейных систем конических сечений, инволюции высших порядков, а также исследовал аксиоматическое значение теоремы Паскаля.

Советские математики А. Н. Колмогоров, П.К. Рашевский, Н. А. Глаголев и др. посвятили свои работы в основном обоснованию проективной геометрии и создали различные системы аксиом. В работе А. Н. Колмогорова исследуется проблема обоснования проективной геометрии с точки зрения топологии, в ней рассматриваются аксиоматики действительных и комплексных проективных пространств. Две работы П. К. Рашевского (1940) посвящены изучению аксиоматики проективной геометрии на плоскости. Н. А. Глаголев дал новую систему аксиом для трехмерного проективного пространства.

В настоящее время развитие проективной геометрии идет по пути построения пространств над алгебрами по аналогии с проективным пространством над полем.

Глава 1

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1.1 Определение проективного пространства и проективной плоскости

Определение. Проективным пространством называется множество элементов, называемых *точками, прямыми и плоскостями*, для которых определены взаимные отношения с помощью трех групп аксиом: принадлежности, порядка и непрерывности.

I группа - аксиомы принадлежности.

I_1. Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая , проходящая через точки A и B.

I_2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, проходящей через точки A и B.

I_3. На каждой прямой имеется не менее трех точек. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_4. Через каждые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит некоторая плоскость. На каждой плоскости имеется не менее одной точки.

I_5. Через каждые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит не более одной плоскости.

I_6. Если две точки A и B прямой лежат на плоскости α, то каждая точка прямой a лежит на плоскости α.

I_7. Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку B.

I_8. Существует не менее четырех точек, не лежащих на одной плоскости.

I_9. Каждые две прямые, расположенные в одной плоскости, имеют общую точку.

Следствия аксиом принадлежности.

1. Через всякие две точки проходит одна и только одна прямая.

2. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.

3. Через прямую a и не лежащую на ней точку A проходит одна и только одна плоскость.

4. Через всякие две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость.

5. Существуют хотя бы две прямые, не имеющие общих точек (скрещивающиеся прямые).

6. Прямая и плоскость всегда имеют общую точку.

7. Две плоскости всегда имеют общую прямую.

8. Три плоскости всегда имеют общую точку.

II группа - аксиомы порядка.

II_1. Каковы бы ни были три различные точки A, B, C прямой a, существует на этой прямой a такая точка D, что пара A, B разделяет пару C, D. Если пара A, B разделяет пару C, D, то все четыре точки A, B, C, D различные.

II_2. Если пара A, B разделяет пару C, D, то пара B, A разделяет пару C, D, и пара C, D разделяет пару A, B.

II_3. Каковы бы ни были четыре различные точки A, B, C, D прямой a, из них могут быть всегда и единственным образом составлены две разделенные пары.

II_4. Пусть даны на прямой a точки A, B, C, D, E; если пары C, D и C, E разделяют пару A, E, то пара D, E не разделяет пару A, B.

II_5. Пусть даны на прямой a точки A, B, C, D, E; если пары C, D и C, E не разделяют пару A, B, то пара D, E также не разделяет пару A, B.

II_6. Пусть A, B и C, D - две пары точек прямой a: $A^{'}$, $B^{'}$ и $C^{'}$, $D^{'}$ - их проекции из какого угодно центра на произвольную прямую a'. Если пары A, B и C, D разделяют друг друга, то пары A', B' и C', D' также разделяют друг друга.

Замечание: проекцией A точки $A^{'}$, лежащей на прямой a' из центра S на прямую a называется точка A пересечения прямой $SA^{'}$ с прямой a.

Следствия аксиом порядка.

1. Две различные точки A, B прямой a разбивают остальные ее точки на два класса, обладаюших таким свойством: пары точек, принадлежащих одному и тому же классу, не разделяют пару A, B; пара точек из разных классов разделяет пару A, B. Указанные классы называются *отрезками*, определяемые точками A, B: точки A, B суть концы каждого из этих отрезков.

2. Каждый из отрезков, определяемых точками A, B, содержит бесконечное число точек.

3. Пусть P, A, B - три (различные) точки прямой a. Удалим из прямой a точку P и объявим точку A предшествующей точке B; тем самым определится порядок следования, обозначаемый $P|AB$ для любых двух, отличных от P точек прямой a. Если в порядке $P|AB$ точка C предшествует точке D, а точка D предшествует точке E и порядок $P|CD$ совпадает с $P|AB$, если, кроме того, E предшествует F, то пара C, E разделяет пару D, F.

(Доказательство следствий 1 - 3 см. в [1]).

III группа аксиом - аксиома непрерывности.

III_1. (Аксиома Дедекинда) Пусть на прямой a установлен порядок точек $P|AB$ и все точки прямой a, отличные от точки P, разбиты на два класса, обладающие следующими тремя свойствами:

1) каждая точка принадлежит одному и только одному из указанных двух классов;

2) оба класса не пусты;

3) всякая точка первого класса предшествует любой точке второго класса.

Тогда либо в первом классе имеется точка, которая следует за всеми остальными его точками, либо во втором классе существует точка, предшествующая всем отличным от нее точкам того же (второго) класса.

Таким образом, основными понятиями проективной геометрии являются *точка, прямая, плоскость*, а основные отношения - *принадлежность точки и прямой, точки и плоскости, разделенность двух пар точек прямой.*

Определение. Проективной плоскостью называется множество элементов, называемых точками и прямыми, для которых определены взаимные отношения с помощью трех групп аксиом: аксиомы принадлежности I_{1-2}, I_3, I_9; аксиомы порядка $\mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_6$; аксиома непрерывности III_1.

Основные понятия проективной плоскости: точка и прямая. Основные отношения: принадлежность точки и прямой, разделенность двух пар точек.

1.2 Расширенные плоскость и расширенное пространство как модели проективной плоскости и проективного пространства

1. Расширенная плоскость

Рассмотрим евклидову плоскость. Каждая прямая ℓ в плоскости задает пучок параллельных ей прямых или, можно сказать, направление. Назовем его *несобственной точкой прямой* ℓ. Ясно, что таких несобственных точек на плоскости - бесконечное множество. В отличие от обычных, будем говорить также собственных точек, несобственную точку нельзя изобразить, ее можно задать, изобразив прямую.

Определение. Расширенной (евклидовой) *плоскостью* называется множество элементов: точек и прямых, при этом:

1) *точками* являются все точки евклидовой плоскости и все несобственные точки;

2) *прямыми* служат:

а) обычные прямые в плоскости, каждая из которых дополнена соответствующей несобственной точкой;

б) *несобственная прямая*, состоящая из всех несобственных точек плоскости.

Теорема: **Расширенная плоскость является моделью проективной плоскости.**

Доказательство: Нужно показать, что расширенная плоскость удовлетворяет аксиомам принадлежности I_{1-2}, I_3, I_9, а также всем аксиомам порядка и непрерывности. Ограничимся проверкой аксиом принадлежности.

Проверка выполнимости аксиом I_{1-2}.

Пусть A и B - точки расширенной плоскости.

1) Если A и B - собственные точки, то через них можно провести только одну прямую ℓ евклидовой плоскости. Дополним прямую ℓ несобственной точкой. Тогда на расширенной плоскости будем иметь прямую, проходящую через точки A и B. Эта прямая единственная, так как точки A и B не принадлежат несобственной прямой.

2) Если A - собственная точка, а B - несобственная точка, заданная прямой b, то по аксиоме параллельности на евклидовой плоскости через точку A можно провести единственную прямую $a||b$. Тогда на расширенной плоскости прямая a имеет ту же несобственную точку, что и прямая b, т.е.точку B. Таким образом, прямая a проходит через точки A и B и, очевидно, является единственной прямой расширенной плоскости, проходящей через эти точки.

3) Если точки A и B - несобственные точки, то они принадлежат несобственной прямой, которая является единственной прямой расширенной плоскости, содержащей различные несобственные точки.

Проверка выполнимости аксиомы I_3.

По аксиомам евклидовой геометрии всякая прямая имеет на евклидовой плоскости по меньшей мере две точки, а на расширенной плоскости она имеет еще одну точку - несобственную. Несобственная прямая имеет также не менее трех точек, которые можно задать тремя попарно пересекающимися прямыми.

Вторая часть аксиомы является следствием евклидовой геометрии.

Проверка выполнимости аксиомы I_9

Пусть заданы прямые a и b.

1) Если a и b - собственные прямые, то на евклидовой плоскости они или пересекаются или параллельны. Но если $a||b$, то на расширенной плоскости они имеют общую несобственную точку, т. е. тоже пересекаются.

2) Если a - собственная прямая, а b - несобственная прямая, то они пересекаются в несобственной точке прямой a. ■

2. Расширенное пространство.

По аналогии с расширенной плоскостью пополним евклидово пространство новыми, несобственными элементами: прямую - одной *несобственной точкой*, которая определяется связкой всех прямых, параллельных этой прямой; плоскость - *несобственной прямой*, одной и той же для всех плоскостей, параллельных данной плоскости. Множество всех несобственных точек и несобственных прямых назовем *несобственной плоскостью.* Полученное **расширенное пространство является моделью проективного пространства**.

(Оставим этот факт без доказательства).

1.3 Координаты точек на расширенной плоскости и в расширенном пространстве

1. Координаты точек на расширенной плоскости.

Введем на расширенной плоскости аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, тем самым каждой собственной точке M плоскости будет поставлена во взаимно-однозначное соответствие упорядоченная пара действительных чисел (x, y) - ее аффинных координат.

Определение. Упорядоченная тройка действительных чисел $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, где $x_3 \neq 0$, называется *однородными координатами точки* $M(x, y)$, если

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Обозначение. $M(x_1, x_2, x_3)$ - точка M имеет однородные координаты $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Очевидно, если $M(x_1, x_2, x_3)$, то и $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, где $\lambda \neq 0$, есть однородные координаты той же точки M. В частности, тройка $(x, y, 1)$ также является тройкой однородных координат точки M.

Таким образом, каждая собственная точка M расширенной плоскости имеет бесконечное множество троек однородных координат, пропорциональных между собой и тройке $(x, y, 1)$. Этот факт отражается в обозначении $M(x_1 : x_2 : x_3)$, в отличие от указанного выше.

Пусть P_∞ - несобственная точка расширенной плоскости, задаваемая прямой ℓ, уравнение которой $ax+by+c=0$. В однородных координатах это уравнение записывается в виде $ax_1+bx_2+cx_3=0$. При постоянных коэффициентах a и b оно определяет пучок прямых, параллельных прямой ℓ. Каким бы ни был коэффициент c, уравнению $ax_1+bx_2+cx_3=0$ удовлетворяет тройка действительных чисел $(b,-a,0)$, ее и примем за тройку однородных координат несобственной точки P_∞. Заметим, что любая тройка вида $(x_1,x_2,0)$ является тройкой однородных координат какой-то несобственной точки P_∞.

Обозначение: $P_\infty,(x_1,x_2,0)$ - несобственная точка P_∞ имеет однородные координаты $(x_1,x_2,0)$.

Очевидно, если $P_\infty(x_1,x_2,0)$, то и тройка $(\lambda x_1,\lambda x_2,0)$, где $\lambda \neq 0$, также является тройкой однородных координат точки P_∞.

Таким образом, каждая несобственная точка P_∞ расширенной плоскости имеет бесконечное множество троек однородных координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, где $x_3=0$, пропорциональных между собой и тройке $(b,-a,0)$.

2. Геометрический смысл соответствия между точками расширенной плоскости и тройками однородных координат.

Пусть рассматриваемая расширенная плоскость (обозначим ее π) находится в трехмерном расширенном пространстве. Присоединим к аффинной системе координат $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ плоскости π вектор $\vec{e_3}=\overrightarrow{SO}$, где $S\notin\pi$

а) если $M(x,y)$ - собственная точка плоскости π, то $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$. Тогда $\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OM}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+\vec{e_3}$, т. е. $\overrightarrow{SM}(x,y,1)$ относительно базиса $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$. Рассмотрим вектор $\vec{m}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{SM}$. Тогда $\vec{m}=\lambda\overrightarrow{SM}$ $(\lambda\neq 0)$ и $\vec{m}(\lambda x,\,\lambda y,\,\lambda)$. Введем обозначение: $\lambda x=x_1,\lambda y=x_2,\lambda=x_3$. Получим, что $\vec{m}(x_1,x_2,x_3)$, при этом тройка (x_1,x_2,x_3) пропорциональна тройке $(x,y,1)$.

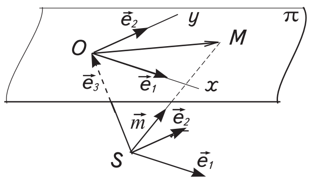

Рис. 1.

Верно и обратное: если тройка $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ пропорциональна тройке $(x,\ y,\ 1)$, то она является тройкой координат вектора $\vec{m}$, коллинеарного вектору $\overrightarrow{SM}$.

Определение. Вектор $\vec{m}$ называется вектором, *представляющим* точку M, или *представителем* точки M, если $\vec{m}||\overrightarrow{SM}$.

Таким образом, *тройка (x_1, x_2, x_3) однородных координат собственной точки M есть тройка координат вектора $\vec{m}$, представляющего ее, при этом координаты вектора пропорциональны тройке $(x, y, 1)$, где (x, y) - аффинные координаты этой точки.*

б) Пусть P_∞ - несобственная точка плоскости π, задаваемая прямой ℓ с уравнением $ax + by + c = 0$. Рассмотрим какой-либо направляющий вектор $\vec{p}$ прямой ℓ. Так как $\vec{p}||\ell$, то $\vec{p} = b\vec{e}_1 - a\vec{e}_2$, т. е. $\vec{p}\ (b, -a, 0)$ относительно базиса $\{\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}\}$. Если $\vec{m}$ есть вектор, коллинеарный вектору $\vec{p}$ $(\vec{m}||\vec{p})$, то $\vec{m} = \lambda\vec{p}$ или $\vec{m}(\lambda b, -\lambda a, 0)$. Введем обозначение $x_1 = \lambda b$, $x_2 = -\lambda a$. Тогда $\vec{m}(x_1, x_2, 0)$, при этом тройка $(x_1, x_2, 0)$ пропорциональна тройке $(b, -a, 0)$.

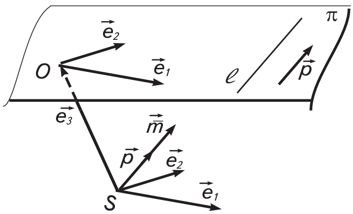

Рис. 2.

Верно и обратное: любая тройка действительных чисел $(x_1, x_2, 0)$, пропорциональная тройке $(b, -a, 0)$, является тройкой координат вектора $\vec{p}||\ell$. Так как каждой несобственной точке P_∞ также соответствует бесконечное множество троек $(x_1, x_2, 0)$, пропорциональных тройке $(b, -a, 0)$, то приходим к выводу: каждой несобственной точке расширенной плоскости соответствует бесконечное множество коллинеарных между собой векторов, координаты которых пропорциональны тройке $(b, -a, 0)$.

Однородные координаты $(x_1, x_2, 0)$ несобственной точки P_∞ прямой ℓ есть координаты представляющего ее вектора $\vec{m}$, при этом $\vec{m}||\ell$ и его координаты пропорциональны тройке $(b, -a, 0)$, a и b - коэффициенты уравнения прямой ℓ на расширенной плоскости π.

Пример: $O(0, 0, 1)$, $X_\infty(1, 0, 0)$ - несобственная точка прямой $O\vec{e_1}$, $Y_\infty(0,\ 1,\ 0)$ - несобственная точка прямой $O\vec{e_2}$.

Таким образом, *геометрический смысл однородных координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ любой точки (собственной и несобственной) M расши-*

ренной плоскости состоит в том, что они представляют собой координаты вектора $\vec{m}$, представителя точки M, относительно специально выбранного базиса $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

3. Координаты точек в расширенном пространстве.

Введем в расширенном пространстве аффинную систему координат
$O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$. Тогда каждая собственная точка M определится аффинными координатами (x, y, z).

Определение: Упорядоченная четверка чисел (x_1, x_2, x_3, x_4) называется *однородными координатами точки M в расширенном пространстве*, если

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Очевидно, что каждой точке M соответствует бесконечное множество пропорциональных между собой четверок действительных чисел $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, при этом все они пропорциональны четверке $(x, y, z, 1)$.

Уравнение плоскости α в аффинных координатах имеет вид: $ax + by + cz + d = 0$, где коэффициенты a, b, c не равны 0 одновременно. В однородных координатах это уравнение запишется в виде: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$. При постоянных коэффициентах a, b, c оно определяет пучок параллельных между собой плоскостей. Если четверка действительных чисел $(x_1, x_2, x_3, 0)$ удовлетворяет уравнению одной из плоскостей пучка, то она удовлетворяет уравнению и любой другой плоскости пучка. Назовем ее четверкой однородных координат несобственной точки плоскости α . Несобственные точки плоскости образуют несобственную прямую. Следовательно, уравнение несобственной прямой плоскости может быть записано в виде:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Собственная прямая ℓ расширенного пространства определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = 0 \end{cases}$$

Присоединив к этой системе уравнений уравнение $x_4 = 0$, получим однородные координаты несобственной точки прямой ℓ.

Таким образом, *каждой несобственной точке расширенного пространства соответствует бесконечное множество пропорциональных между собой четверок действительных чисел*
(x_1, x_2, x_3, x_4), где $x_4 = 0$.

По аналогии с расширенной плоскостью однородные координаты точек в расширенном пространстве можно связать с координатами векторов в четырехмерном пространстве.

Замечание: На расширенной прямой каждой точке соответствует бесконечное множество пропорциональных между собой пар действительных чисел (x_1, x_2), ее однородных координат; при этом для собственных точек они пропорциональны паре $(x, 1)$, где x - аффинная координата этой точки, а для несобственной точки пропорциональны паре $(1, 0)$. Однородные координаты точек расширенной прямой являются координатами векторов-представителей, при этом представителем несобственной точки является вектор $\vec{e}_1(1, 0)$ и любой вектор ему коллинеарный.

1.4 Проективные координаты точки на проективной плоскости

Поскольку расширенная евклидова плоскость является моделью проективной плоскости, то проективную геометрию будем рассматривать в ее реализации на расширенной плоскости.

Будем исходить из того, что проективные координаты являются обобщением однородных координат.

Пусть π - проективная плоскость, вложенная в проективное пространство. Выберем произвольно точку S, не принадлежащую плоскости π, и три некомпланарных вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, которые отложим от точки S. В направлении векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ через точку S проведем прямые и найдем точки A_1, A_2, A_3 пересечения этих прямых с плоскостью π. Назовем треугольник $A_1A_2A_3$ *базисным* или *координатным треугольником*, а векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$-представителями соответственно точек A_1, A_2, A_3. Найдем также единичную точку E, которая является точкой пересечения прямой $S\vec{e}$, где $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, с плоскостью π.

Определение 1. Множество, состоящее из трех точек A_1, A_2, A_3, не лежащих на одной прямой, и единичной точки E, представители которых $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{e}$ связаны соотношением $\vec{e} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ называется *проективной системой координат (проективным репером)*, а базис $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ - *базисом, связанным с этой системой координат.*

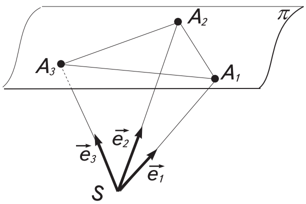

Рис. 3.

Теорема 1. **Два базиса** $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ **и** $B^{'} = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$ **связаны с одной и той же проективной системой координат тогда и только тогда, когда** $\vec{e_1}' = \lambda\vec{e_1}$, $\vec{e_2}' = \lambda\vec{e_2}$, $\vec{e_3}' = \lambda\vec{e_3}$, $(\lambda \neq 0)$.

Доказательство.

1) Пусть базисы B и $B^{'}$ связаны с одной и той же системой координат. Так как векторы $\vec{e_1}$ и $\vec{e_1}'$ являются представителями одной и той же точки A_1, то они коллинеарны, т. е. $\vec{e_1}' = \lambda_1\vec{e_1}$.Аналогично, $\vec{e_2}' = \lambda_2\vec{e_2}$, $\vec{e_3}' = \lambda_3\vec{e_3}$. По определению базиса, связанного с проективной системой координат, имеем $\vec{e} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{e'} = \vec{e_1}' + \vec{e_2}' + \vec{e_3}'$. Тогда $\lambda\vec{e} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$ и $\vec{e} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{e_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{e_2} + \frac{\lambda_3}{\lambda}\vec{e_3}$. Так как разложение вектора $\vec{e}$ по базису B единственно, то $\frac{\lambda_1}{\lambda} = 1$, $\frac{\lambda_2}{\lambda} = 1$, $\frac{\lambda_3}{\lambda} = 1$. Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, и, следовательно,

$$\vec{e_1}' = \lambda\vec{e_1},\ \vec{e_2}' = \lambda\vec{e_2},\ \vec{e_3}' = \lambda\vec{e_3}.$$

2) Пусть базисы B и $B^{'}$ таковы, что $\vec{e_1}' = \lambda\vec{e_1}$, $\vec{e_2}' = \lambda\vec{e_2}$, $\vec{e_3}' = \lambda\vec{e_3}$. Тогда имеем три пары коллинеарных векторов $\vec{e_1}'||\vec{e_1}$, $\vec{e_2}'||\vec{e_2}$, $\vec{e_3}'||\vec{e_3}$. Значит пары векторов $\vec{e_1}'$ и $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}'$ и $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}'$ и $\vec{e_3}$ - являются соответственно представителями точек A_1, A_2, A_3. Далее, $\vec{e'} = \vec{e_1}' + \vec{e_2}' + \vec{e_3}' = \lambda\vec{e_1} + \lambda\vec{e_2} + \lambda\vec{e_3} = \lambda(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}) = \lambda\vec{e}$. Следовательно, векторы $\vec{e}$ и $\vec{e'}$ представляют одну и ту же точку E. Доказали, что базисы B и $B^{'}$ связаны с одной и той же проективной системой координат. ■

Определение 2. Проективными (однородными) координатами $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ *точки* M проективной плоскости относительно проективной системы координат $R = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ E\}$ называются координаты ее вектора-представителя $\vec{m}$ $(\vec{m}||\overrightarrow{SM})$ относительно базиса $B = \{\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}\}$, связанного с этой проективной системой координат.

Таким образом, по определению

$$M(x_1, x_2, x_3) \Longleftrightarrow \vec{m} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Теорема 2. **Проективные координаты точки всегда существуют и определяются с точностью до ненулевого множителя.**

Доказательство. Существование следует из существования координат вектора. Из определения 2 следует, что координаты точки M зависят от выбора представителей точек M, A_1, A_2, A_3, E. Пусть наряду с представителями $\vec{m}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}$ этих точек имеются представители $\vec{m'}$, $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$, $\vec{e_3}'$, $\vec{e'}$ соответственно этих же точек. Тогда имеем ряд соотношений:

$$\begin{aligned}
&\vec{m} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,\\
&\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\\
&\vec{e'} = \vec{e_1}' + \vec{e_2}' + \vec{e_3}',\\
&\vec{m}' = x_1^{'}\vec{e_1}' + x_2^{'}\vec{e_2}' + x_3^{'}\vec{e_3}',\\
&\vec{e_1}' = \lambda\vec{e}_1,\ \ \vec{e_2}' = \lambda\vec{e}_2,\quad \vec{e_3}' = \lambda\vec{e}_3,\ \ (\lambda \neq 0),\\
&\vec{m}' = \rho\vec{m},\ \ (\rho \neq 0).
\end{aligned}$$

Найдем
$\vec{m}' = \rho(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = (\rho x_1)\vec{e}_1 + (\rho x_2)\vec{e}_2 + (\rho x_3)\vec{e}_3.$
С другой стороны
$\vec{m}' = x_1'(\lambda\vec{e}_1) + x_2'(\lambda\vec{e}_2) + x_3'(\lambda\vec{e}_3) = (x_1'\lambda)\vec{e}_1 + (x_2'\lambda)\vec{e}_2 + (x_3'\lambda)\vec{e}_3.$
В силу единственности разложения вектора $\vec{m}'$ по базису B имеем $\rho x_1 = \lambda x_1^{'}$, $\rho x_2 = \lambda x_2^{'}$, $\rho x_3 = \lambda x_3^{'}$.
Откуда

$$x_1^{'} = \frac{\rho}{\lambda}x_1,\ x_2^{'} = \frac{\rho}{\lambda}x_2,\ x_3^{'} = \frac{\rho}{\lambda}x_3.$$

Следовательно, тройки проективных координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ и $(x_1^{'},\ x_2^{'},\ x_3^{'})$ точки M отличаются на ненулевой множитель $\frac{\rho}{\lambda}$ (пропорциональны). ■

Теорема 3. **Пусть имеются две проективные системы координат $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ и $R'=\{A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}, E^{'}\}$. Тогда проективные координаты (x_1, x_2, x_3) и $(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'})$ одной и той же точки M относительно этих систем координат связаны соотношениями:**

$$\rho x_1 = \lambda_1 c_{11} x_1^{'} + \lambda_2 c_{12} x_2^{'} + \lambda_3 c_{13} x_3^{'},$$

$$\rho x_2 = \lambda_1 c_{21} x_1^{'} + \lambda_2 c_{22} x_2^{'} + \lambda_3 c_{23} x_3^{'},$$
$$\rho x_3 = \lambda_1 c_{31} x_1^{'} + \lambda_2 c_{32} x_2^{'} + \lambda_3 c_{33} x_3^{'},$$

где (c_{11}, c_{21}, c_{31}), (c_{12}, c_{22}, c_{32}), (c_{13}, c_{23}, c_{33}) – **проективные координаты соответственно точек** $A_1^{'}$, $A_2^{'}$, $A_3^{'}$ **относительно системы координат** R, **а** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ **являются решением системы уравнений:**

$$\begin{cases} \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{12} + \lambda_3 c_{13} = b_1, \\ \lambda_1 c_{21} + \lambda_2 c_{22} + \lambda_3 c_{23} = b_2, \\ \lambda_1 c_{31} + \lambda_2 c_{32} + \lambda_3 c_{33} = b_3, \end{cases}$$

где (b_1, b_2, b_3) **- проективные координаты точки** $E^{'}$ **относительно системы координат** R.

Доказательство теоремы предоставляется читателю.

1.5 Проективные координаты точки в проективном пространстве и на проективной прямой

Определение 1. Проективной системой координат $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$ *в проективном пространстве* называется множество, состоящее из пяти точек A_1, A_2, A_3, A_4, E, векторы-представители которых связаны соотношением $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 = \vec{e}$.

Определение 2. Проективными (однородными) координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) *точки* M *в проективном пространстве* относительно проективной системы координат R=$\{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$ называются координаты ее вектора- представителя $\vec{m}$ относительно базиса $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, связанного с системой координат R.

Определение 3. Проективной системой координат $R = \{A_1, A_2, E\}$ *на проективной прямой* называется множество, состоящее из трех точек A_1, A_2, E, векторы-представители которых связаны соотношением $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Базис $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ называется *базисом, связанным с проективной системой координат* R.

Определение 4. Проективными (однородными) координатами (x_1, x_2) *точки* M *на проективной прямой* относительно проективной системы координат R=$\{A_1, A_2, E\}$ называются координаты ее вектора-представителя $\vec{m}$ относительно базиса B=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, связанного с системой координат R.

По аналогии с проективной плоскостью доказывается, что в проективном пространстве и на проективной прямой однородные проективные координаты точки определяются с точностью до ненулевого множителя.

Задача. На проективной прямой ℓ задана проективная система координат $R=\{A_1, A_2, E\}$. Построить точки: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(2,0)$, $F(2,-1)$.

Решение. Выберем произвольно $S \notin \ell$ и проведем прямые SA_1, SA_2, SE. На прямой SE возьмем точку P и проведем через нее прямые q и r, параллельные соответственно SA_1 и SA_2. Найдем точки $K = SA_1 \cap r$, $L = SA_2 \cap q$. Введем обозначение $\overrightarrow{SP} = \vec{e}$, $\overrightarrow{SK} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{SL} = \vec{e}_2$. Тогда базис $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ есть базис, связанный с данной системой координат R, так как $\vec{e}_1 \parallel SA_1$, $\vec{e}_2 \parallel SA_2$, $\vec{e} \parallel SE$ и $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

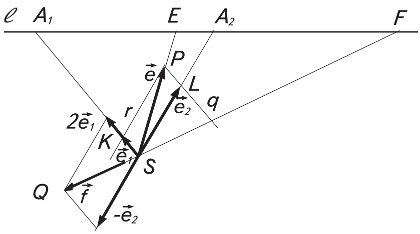

Рис. 4.

Теперь строим точки. Вектор-представитель $\vec{a}$ точки $A(1,0)$ имеет координаты $(1,0)$ и поэтому $\vec{a} = \vec{e}_1$, и тогда $A = A_1$. Аналогично, $B = A_2$, $C = E$. Для точки D имеем: ее вектор-представитель $\vec{d} = 2\vec{e}_1$. Следовательно, $D = A_1$. И, наконец, вектор- представитель $\vec{f}$ точки F равен: $\vec{f} = \vec{2}e_1 - \vec{e}_2$. Построим его по правилу параллелограмма и получим $\vec{f} = \overrightarrow{SQ}$. Тогда точку F найдем как точку пересечения прямой SQ с прямой ℓ.

1.6 Уравнение прямой на проективной плоскости

Пусть имеется проективная плоскость и на ней задана проективная система координат $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$.

Задача. Даны точки $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. Составить уравнение прямой ℓ, проходящей через точки A и B.

Решение. Пусть $M(x_1, x_2, x_3)$ - любая точка прямой ℓ. Рассмотрим векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{m}(x_1, x_2, x_3)$ - представители соответственно точек A, B, M. Так как $M \in \ell$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ - компланарные векторы, и тогда $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, или (в координатном виде):

$$\begin{cases} x_1 = \alpha a_1 + \beta b_1, \\ x_2 = \alpha a_2 + \beta b_2, \\ x_3 = \alpha a_3 + \beta b_3. \end{cases} \tag{1.6.1}$$

Уравнения (1.6.1) называются *параметрическими уравнениями прямой* ℓ. Условие компланарности векторов $\vec{m}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ может быть записано также в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.6.2}$$

Уравнение (1.6.2) называется *уравнением прямой , проходящей через две точки.* Из уравнения (1.6.2) легко получается *условие принадлежности трех точек $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ одной прямой.* Оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.6.3}$$

Запишем уравнение (1.6.2) в виде:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

и обозначим

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, u_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда получим уравнение:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{1.6.4}$$

Уравнение (1.6.4) называется *(общим) уравнением прямой.* Всякое уравнение (1.6.4), где u_1, u_2, u_3 - одновременно не равны нулю, является уравнением некоторой прямой. Очевидно, два уравнения $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ и $u_1'x_1 + u_2'x_2 + u_3'x_3 = 0$ являются уравнениями одной и той же прямой тогда и только тогда, когда $u_1 : u_2 : u_3 = u_1^{'} : u_2^{'} : u_3^{'}$.

*Определение. **Координатами прямой*** ℓ с уравнением $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ называется тройка коэффициентов $(u_1,\, u_2,\, u_3)$.

Заметим, что координаты прямой определяются с точностью до ненулевого множителя.

Обозначение. $\ell(u_1, u_2, u_3)$ - прямая ℓ имеет координаты $(u_1,\, u_2,\, u_3)$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2{,}1{,}-3)$ и $B(0{,}2{,}1)$.

Решение. Составим уравнение прямой AB в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда получим $7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$ - искомое уравнение.

1.7 Нахождение точки пересечения двух прямых. Уравнение пучка прямых

Пусть имеется проективная плоскость и на ней задана проективная система координат $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Всякие две различные прямые на проективной плоскости пересекаются (аксиома I_9). Решим следующую задачу.

Задача. Даны две прямые $\ell(u_1, u_2, u_3)$ и $m(v_1, v_2, v_3)$. Найти координаты точки S их пересечения.

Решение. Обозначим $S(x_1, x_2, x_3)$. Тогда, так как точка S принадлежит прямым ℓ и m, ее координаты удовлетворяют системе, составленной из уравнений прямых ℓ и m:

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0. \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Так как координаты x_1, x_2, x_3 точки S не могут быть одновременно равными нулю, то пусть, например, $x_3 \neq 0$. Разделим каждое уравнение системы (1.7.1) на x_3 и запишем ее в виде:

$$\begin{cases} u_1\dfrac{x_1}{x_3} + u_2\dfrac{x_2}{x_3} = -u_3, \\ v_1\dfrac{x_1}{x_3} + v_2\dfrac{x_2}{x_3} = -v_3. \end{cases} \tag{1.7.2}$$

Решая по формулам Крамера, получим:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \frac{x_2}{x_3} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \tag{1.7.3}$$

где,

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -u_3 & u_2 \\ -v_3 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} u_1 & -u_3 \\ v_1 & -v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

Отношения (1.7.3) запишем в виде:

$$\frac{x_1}{\Delta_1} = \frac{x_3}{\Delta_3}, \ \frac{x_2}{\Delta_2} = \frac{x_3}{\Delta_3}.$$

Поэтому $x_1 : x_2 : x_3 = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3$, т. е. тройка координат точки S пропорциональна тройке $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$. Следовательно, $S(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$; воспользовавшись (1.7.4), получим:

$$S = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{1.7.5}$$

Задача решена.

Определение. Пучком прямых на проективной плоскости с центром в точке S называется множество всех прямых плоскости, проходящих через точку S.

Пучок прямых может быть задан или центром, или двумя своими прямыми. Пусть пучок прямых задан прямыми $\ell(u_1, u_2, u_3)$ и $m(v_1, v_2, v_3)$. Составим уравнение произвольной прямой пучка. Положим, $p(p_1, p_2, p_3)$ - произвольная прямая пучка. Центр пучка $S = \ell \cap m$ имеет координаты (1.7.5), и так как $S \in p$, то

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} p_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} p_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} p_3 = 0$$

или
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.7.6}$$

Уравнение (1.7.6) называется *уравнением пучка прямых*, заданного прямыми $\ell(u_1, u_2, u_3)$ и $m(v_1, v_2, v_3)$. Оно же представляет собой *условие принадлежности трех прямых* $\ell(u_1, u_2, u_3)$, $m(v_1, v_2, v_3)$, $p(p_1, p_2, p_3)$ *одному пучку прямых.* Если пучок прямых задан центром $S(x_1, x_2, x_3)$, то его уравнение имеет вид:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0 \tag{1.7.7}$$

Уравнение (1.7.7) - это уравнение произвольной прямой пучка. В этом уравнении x_1, x_2, x_3 фиксированы, а p_1, p_2, p_3 - переменные.

Таким образом, одно и то же уравнение:
$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$
можно рассматривать и как уравнение прямой, и как уравнение пучка прямых.

Пример 1. Найти точку пересечения прямых ℓ и m, заданных уравнениями $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ и $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ соответственно.

Решение. Составим определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив его, найдем $3u_2 + 3u_3 = 0$ или $u_2 + u_3 = 0$.

Следовательно, $S(0, 1, 1)$ - точка пересечения прямых ℓ и m,

Пример 2. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ E\}$, в котором точки A_1 и E – несобственные. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(1{,}3{,}{-2})$ и параллельной прямой a, заданной уравнением $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$.

Решение. 1) Из условия задачи следует, что несобственной прямой плоскости является прямая EA_1. Составим ее уравнение:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим общее уравнение несобственной прямой

$$x_2 - x_3 = 0.$$

2) Найдем координаты несобственной точки P_∞ данной прямой a как точки пересечения ее с несобственной прямой (см. (1.7.6)):

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подсчитав определитель получим уравнение

$$2u_1 - u_2 - u_3 = 0.$$

Значит, точка

$$P_\infty(2, -1, -1).$$

3) Составим уравнение прямой b, параллельной прямой a и проходящей через точку M, как уравнение прямой MP_∞:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получим общее уравнение искомой прямой b:

$$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0.$$

1.8 Принцип двойственности

Пусть на проективной плоскости задана проективная система координат $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Тогда для каждой точки и для каждой прямой плоскости можно определить координаты. Установим на проективной плоскости соответствие:

$$M(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \ell'(x_1, x_2, x_3),$$
$$\ell(u_1, u_2, u_3) \longrightarrow M'(u_1, u_2, u_3),$$

т. е. точке M ставится в соответствие прямая ℓ', имеющая те же координаты, что и точка M, и каждой прямой ℓ ставится в соответствие точка M', имеющая те же координаты, что и прямая ℓ. Это соответствие:

1. биективно,

2. сохраняет отношение принадлежности, т. е. если $M \in \ell$, то и прямая $\ell^{'}$ проходит через точку $M^{'}$, так как отношения принадлежности $M \in \ell$ и $M^{'} \in \ell^{'}$ имеют один и тот же вид:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

Таким образом, **на проективной плоскости можно установить биективное соответствие между множеством точек и множеством прямых, которое сохраняет отношение принадлежности**. Этот факт позволяет доказать теорему, называемую принципом двойственности проективной плоскости.

Определение. Пусть имеется предложение **T**, сформулированное для точек и прямых проективной плоскости, связанных между собой отношением принадлежности. Тогда предложение $\mathbf{T}^{'}$, полученное из **T** заменой слов:

"точка"	$\longleftrightarrow$	"прямая"
"лежит на"	$\longleftrightarrow$	"проходит через"
"коллинеарные"	$\longleftrightarrow$	"сходящиеся"
"точка пересечения двух прямых"	$\longleftrightarrow$	"прямая, соединяющая две точки"

и т. п., называется предложением, *двойственным* предложению **T**.

Примеры двойственных предложений

1. "Две точки принадлежат одной прямой"$\longleftrightarrow$ "Две прямые пересекаются в одной точке".

2. "Через две точки проходит одна и только одна прямая" (аксиома I_{1-2}) $\longleftrightarrow$ "Две прямые пересекаются в одной и только одной точке (аксиома I_9).

3. "Три точки, не лежащие на одной прямой"$\longleftrightarrow$ "Три прямые, не проходящие через одну точку".

Определение. Треугольником называется множество, состоящее из трех неколлинеарных точек и трех прямых, соединяющих их попарно.

Треугольник двойственен самому себе.

Теорема. *(Принцип двойственности проективной плоскости).* **Если на проективной плоскости справедливо предложение T, в котором говорится о точках, прямых и их взаимной**

принадлежности, то справедливо и двойственное предложение $\mathbf{T}^{'}$.

Доказательство. Установим на проективной плоскости соответствие, о котором говорится в начале параграфа. Применим его к тем точкам и прямым, о которых говорится в предложении $\mathbf{T}$. Получим двойственное предложение $\mathbf{T}^{'}$. Так как это соответствие не нарушает взаимной принадлежности точек и прямых и предложение $\mathbf{T}$ справедливо, то и предложение $\mathbf{T}^{'}$ так же справедливо. ■

Замечание. В проективном пространстве также действует принцип двойственности, который формулируется так же, как принцип двойственности на проективной плоскости, но использует замену слов:

"точка"	$\longleftrightarrow$	"плоскость"
"прямая"	$\longleftrightarrow$	"прямая"
"лежит на"	$\longleftrightarrow$	"проходит через"
"коллинеарные"	$\longleftrightarrow$	"сходящиеся"
"прямая пересечения двух плоскостей"	$\longleftrightarrow$	"прямая, соединяющая две точки".

Благодаря принципу двойственности из двух двойственных предложений достаточно доказать только одно.

Принято называть:

1) принцип двойственности проективной плоскости - *малым принципом двойственности.*

2) принцип двойственности проективного пространства - *большим принципом двойственности.*

1.9 Теорема Дезарга

Определение. Два треугольника называются *соответственными*, если между их вершинами установлено взаимно-однозначное соответствие.

Пример. Треугольники ABC и $A^{'}B^{'}C^{'}$ соответственные, при этом A и $A^{'}$, B и $B^{'}$, C и $C^{'}$ - пары соответственных вершин (обозначены одной буквой). Тогда AB и $A^{'}B^{'}$, BC и $B^{'}C^{'}$, AC и $A^{'}C^{'}$ – пары соответственных сторон.

Теорема Дезарга. **Если в двух соответственных треугольниках** ABC **и** $A'B'C'$ **прямые** AA', BB', CC', **соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке** L , **то точки** $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$, $R = AC \cap A'C'$ **пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой** ℓ.

Обратная теорема Дезарга. **Если в двух соответственных треугольниках** ABC **и** $A'B'C'$ **точки** $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$, $R = AC \cap A'C'$ **пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой** ℓ, **то прямые** AA', BB', CC', **соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке** L.

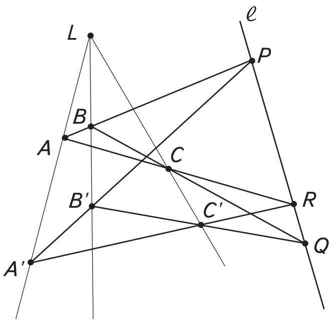

Рис. 5.

Нетрудно видеть, что обратная теорема Дезарга является предложением, двойственным теореме Дезарга. Поэтому достаточно доказать одну из них.

Доказательство *теоремы Дезарга.* Воспользуемся тем, что каждой точке проективной плоскости соответствует вектор-представитель. Пусть $A \to \vec{a}$, $B \to \vec{b}$, $C \to \vec{c}$, $A' \to \vec{a}'$, $B' \to \vec{b}'$, $C' \to \vec{c}'$, $L \to \vec{\ell}$. Так как $L \in AA'$, то $\vec{\ell} = \alpha\vec{a} + \alpha'\vec{a}'$. Аналогично из $L \in BB'$ и $L \in CC'$ следует, что $\vec{\ell} = \beta\vec{b} + \beta'\vec{b}'$ и $\vec{\ell} = \gamma\vec{c} + \gamma'\vec{c}'$. Из этих равенств составим следующие равенства:

$$\alpha\vec{a} + \alpha'\vec{a}' = \beta\vec{b} + \beta'\vec{b}',$$
$$\beta\vec{b} + \beta'\vec{b}' = \gamma\vec{c} + \gamma'\vec{c}',$$
$$\gamma\vec{c} + \gamma'\vec{c}' = \alpha\vec{a} + \alpha'\vec{a}',$$

а затем перепишем их в виде:

$$\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = -\alpha'\vec{a}' + \beta'\vec{b}',$$
$$\beta\vec{b} - \gamma\vec{c} = -\beta'\vec{b}' + \gamma'\vec{c}',$$
$$\gamma\vec{c} - \alpha\vec{a} = -\gamma'\vec{c}' + \alpha'\vec{a}'.$$

Рассмотрим первое из них. Так как вектор $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то он представляет точку, принадлежащую прямой AB. Вектор $-\alpha'\vec{a}' + \beta'\vec{b}'$ представляет точку, принадлежащую прямой $A'B'$. А так как векторы $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$ и $-\alpha'\vec{a}' + \beta'\vec{b}'$ равны, то они представляют одну и ту же точку, являющуюся точкой пересечения прямых AB и $A^{'}B^{'}$, т. е. точку P. Итак, точка P имеет вектор-представитель $\vec{p} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$. Аналогично рассуждая, получим,что векторы $\vec{q} = \beta\vec{b} - \gamma\vec{c}$, $\vec{r} = \gamma\vec{c} - \alpha\vec{a}$ являются соответственно представителями точек Q, R. Найдем $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = (\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}) + (\beta\vec{b} - \gamma\vec{c}) + (\gamma\vec{c} - \alpha\vec{a}) = (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) - (\alpha a + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \vec{0}$. Следовательно, векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ - линейно-зависимы и, значит, точки P, Q, R лежат на одной прямой. ■

Определение. Треугольники ABC и $A^{'}B^{'}C^{'}$, удовлетворяющие условиям теоремы Дезарга (прямой или обратной), называются *дезарговыми треугольниками*; точка L называется *дезарговым центром* или *центром перспективы*, а прямая ℓ – *дезарговой осью* или *осью перспективы.*

Замечание. Конфигурация теоремы Дезарга, т. е. совокупность фигурирующих в этой теореме 10 точек и 10 прямых, в определенном смысле симметрична. Каждая точка принадлежит трем прямым, и каждая прямая содержит три точки. Все точки играют одинаковую роль и любая из них может быть выбрана в качестве дезаргова центра. Любая прямая может быть выбрана в качестве дезарговой оси.

Пример 1. Укажите в конфигурации Дезарга, изображенной на рисунке 5, пару дезарговых треугольников и дезаргову ось, приняв за дезаргов центр точку B'.

Решение. Через дезаргов центр B' проходят три прямые $A'P$, LB и $C'Q$ (для их обозначения не используем B' !), соединяющие пары соответственных вершин. Следовательно, соответственными вершинами являются: A' и P, L и B, C' и Q. Они образуют треугольники $A'LC'$ и PBQ, стороны которых являются элементами данной конфигурации (нельзя проводить новых прямых !). Это искомые дезарговы треугольники. Дезарговой осью является прямая, содержащая три оставшиеся точки A, C, R конфигурации – точки пересечения соответственных сторон найденных треугольников.

Пример 2. Укажите в конфигурации Дезарга, изображенной на рисунке, пару дезарговых треугольников и дезаргов центр, приняв за дезаргову ось прямую LA'.

Решение. Дезаргова ось LA' содержит три точки L, A и A' – точки пересечения соответственных сторон дезарговых треугольников. Поэтому соответственными сторонами являются: BB' и CC', BP и CR, $B'P$ и $C'R$ (для обозначения сторон не используем L, A,

A'). Они образуют два треугольника $BB'P$ и $CC'R$ (следим за тем, чтобы вершины и стороны треугольников были элементами данной конфигурации !), соответственными вершинами которых являются: B и C, B' и C', P и R. Прямые BC, $B'C'$, PR пересекаются в точке Q. Итак, $\triangle BB'P$ и $\triangle CC'R$ – искомые дезарговы треугольники; точка Q – искомый дезаргов центр.

1.10 Частные случаи теоремы Дезарга и их применение к решению задач

Теорему Дезарга можно рассматривать на расширенной и на евклидовой плоскости. На расширенной плоскости возможны следующие случаи теоремы Дезарга для дезарговых центра L и оси ℓ:

1. L - собственная точка, ℓ - собственная прямая.

2. L - несобственная точка, ℓ - собственная прямая.

3. L - собственная точка, ℓ - несобственная прямая.

4. L - несобственная точка, ℓ - несобственная прямая.

Тогда для евклидовой плоскости имеем:

1. $AA' \cap BB' \cap CC' = L$, $AB \cap A'B' = P$, $BC \cap B'C' = Q$, $AC \cap A'C' = R$, $P \in \ell$, $Q \in \ell$, $R \in \ell$.

2. $AA'||BB'||CC' = L$, $AB \cap A'B'= P$, $BC \cap B'C' = Q$, $AC \cap A'C' = R$.

3. $AA' \cap BB' \cap CC' = L$, $AB||A'B'$, $BC||B'C'$, $AC||A'C'$.

4. $AA'||BB'||CC' = L$, $AB||A'B'$, $BC||B'C'$, $AC||A'C'$.

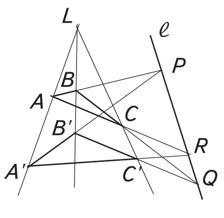

Рис. 6.

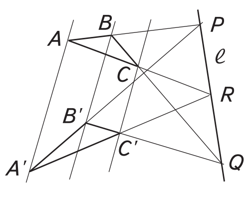

Рис. 7.

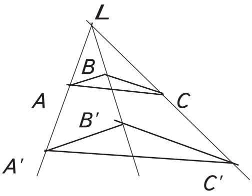

Рис. 8.

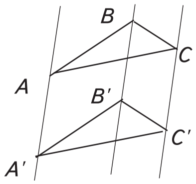

Рис. 9.

Теорема Дезарга для евклидовой плоскости.

Если в двух соответствующих треугольниках прямые, соединяющие соответственные вершины, или пересекаются в одной точке, или параллельны, то соответственные стороны либо пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой, либо попарно параллельны либо две соответственные стороны параллельны прямой, соединяющей точки пересечения двух других пар соответственных сторон.

На рисунках 6 и 7 изображены конфигурации Дезарга, соответствующие случаям 1 и 2, а рисунки 8 и 9 отражают частные случаи 3 и 4 теоремы Дезарга для евклидовой плоскости.

В случае 3 треугольники ABC и $A^{'}B^{'}C^{'}$ - гомотетичны, а в случае 4 один треугольник может быть получен из другого параллельным переносом.

Теорема Дезарга и ее частные случаи широко применяются при решении задач на евклидовой плоскости. В задачах на доказательство рассматриваются соответственные треугольники, удовлетворяющие прямой или обратной теореме Дезарга. В задачах на построение прежде всего решается вопрос, какой из частных случаев теоремы Дезарга можно связать с задачей. При этом исходим из наличия параллельных прямых. Во время анализа выполняется чертеж, соответствующий выбранному частному случаю. Затем на этом чертеже отмечаются данные и искомые элементы, и решается вопрос, какие из элементов конфигурации можно взять произвольно, а какие следует построить и как.

Пример. Даны две прямые $a||b$ и точка C. Пользуясь одной линейкой, через точку C провести прямую, параллельную данным прямым.

Решение.*Анализ.* Так как в итоге будут три параллельные между собой прямые, то выбираем случай 2 (рис. 7). Отметим данные и искомые элементы: $AA^{'} = a$, $BB^{'} = b$, C - данная точка, $CC^{'}$ - искомая прямая. Очевидно, можно взять произвольно точки A, $A^{'} \in a$; B, $B^{'} \in b$. Тогда можно построить точку $P = AB \cap A^{'}B^{'}$. Ось никак не определена, ее также можно провести произвольно, но через точку P. Тогда можно построить точки Q и R как точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC и AC. Точка $C^{'}$ построится как точка пересечения прямых $B^{'}Q$ и $A^{'}R$. Таким образом, искомая прямая будет построена.

Построение. Строим:

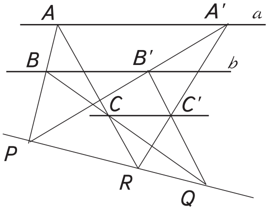

Рис. 10.

1. $A \in a, A^{'} \in a$, $B \in b, B^{'} \in b$;
2. $P = AB \cap A^{'}B^{'}$;
3. ℓ, $P \in \ell$
4. $R = AC \cap \ell$;
5. $Q = BC \cap \ell$;
6. $C^{'} = B^{'}Q \cap A^{'}R$;
7. $CC^{'}$.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A^{'}B^{'}C^{'}$. В этих треугольниках по построению точки $P = AB \cap A^{'}B^{'}$, $Q = BC \cap B^{'}C^{'}$, $R = AC \cap A^{'}C^{'}$ лежат на одной прямой ℓ. Следовательно, $\triangle ABC$ и $\triangle A^{'}B^{'}C^{'}$ удовлетворяют условию обратной теоремы Дезарга (имеют дезаргову ось). И так как $AA^{'}||BB^{'}$, то по обратной теореме Дезарга прямая $CC^{'}$ им параллельна. Значит, прямая $CC^{'}$ - искомая, что и требовалось доказать.

Исследование. Задача всегда имеет решение, и притом всегда единственное.

1.11 Группа проективных преобразований проективной плоскости.

1. Группа проективных преобразований. Предмет проективной геометрии.

Определение. Пусть на проективной плоскости имеются две проективные системы координат (два проективных репера): $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ и $R^{'} = \{A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}, E^{'}\}$. Тогда преобразование плоскости, которое всякой точке M с координатами (x_1, x_2, x_3) относительно R ставит в соответствие точку $M^{'}$ с теми же координатами $(x_1,$

x_2, x_3) относительно $R^{'}$, называется *проективным преобразованием плоскости.*

Условимся в дальнейшем обозначать:

1) $M(x_1, x_2, x_3)_R$ - координаты точки M относительно репера R.

2) $f : R \to R^{'}$ - проективное преобразование f задано реперами R и $R^{'}$.

Заметим. Так как $A_1(1, 0, 0)_R$ и $A_1^{'}(1, 0, 0)_{R'}$, то A_1 и $A_1^{'}$ - соответственные точки. Аналогично A_2 и $A_2^{'}$, A_3 и $A_3^{'}$, E и $E^{'}$ - пары соответственных точек.

Лемма. Пусть проективное преобразование плоскости f задано реперами R, $R^{'}$ и R_1 - какой-то третий репер, а $R_1^{'}$ - его образ. Тогда для любой точки M плоскости и ее образа $M^{'} = f(M)$ выполняется свойство: если $M(y_1, y_2, y_3)_{R_1}$, то $M^{'}(y_1, y_2, y_3)_{R_1'}$ (те же координаты).

Иначе говоря, если проективное преобразование f задано реперами R и R', то его можно также задать с помощью реперов R_1 и R_1', где R_1 - произвольно выбранный репер, а $R_1' = f(R_1)$ - его образ.

Доказательство леммы см. в[5], стр. 32-33.

Теорема 1. **Множество всех проективных преобразований проективной плоскости есть группа относительно композиции преобразований.**

Доказательство.

1°. *Свойство замкнутости.*

Имеем $f : R \to R'$ и $g : R_1 \to R_1'$ - два проективных преобразования. Надо доказать, что их композиция $g \circ f$ - тоже проективное преобразование.

Воспользуемся леммой: для преобразования g реперы R_1 и R_1' можно заменить реперами R' и $R^{''} = g(R')$. Тогда, так как $R' = f(R)$ и $R^{''} = g(R')$, то $R^{''} = (g \circ f)(R)$. Далее, пусть M - любая точка плоскости и $M(x_1, x_2, x_3)_R$. Найдем $M' = f(M)$ и $M^{''} = g(M')$. Тогда $M^{''} = (g \circ f)(M)$. Так как f - проективное преобразование, заданное реперами R и R', то $M'(x_1, x_2, x_3)_{R'}$. Аналогично, g - проективное преобразование, заданное реперами R' и $R^{''}$. Поэтому $M^{''}(x_1, x_2, x_3)_{R''}$ - координаты те же, что и у точки M'. Доказали, что преобразование $g \circ f$:

1) отображает $R \to R^{''}$;

2) любую точку $M(x_1, x_2, x_3)_R$ отображает в точку M'' $(x_1,$ $x_2,$ $x_3)_{R''}$ - (с теми же координатами). По определению $g \circ f$ - проективное преобразование.

2°. *Ассоциативность* выполняется, потому что это свойство выполняется на множестве всех преобразований.

3°. *Существование нейтрального элемента.*

Роль нейтрального элемента на множестве всех преобразований, как известно, играет тождественное преобразование e. Остается доказать, что e - проективное преобразование.

Действительно, $e : R \to R$ (любой репер отображает на себя) и так как каждую точку тоже отображает саму на себя, то не изменяет ее координаты и поэтому является проективным преобразованием.

4°. *Существование симметричного элемента.*

Для любого преобразования роль симметричного элемента играет обратное преобразование. Остается показать, что если f - проективное преобразование, то и обратное преобразование f^{-1} является проективным преобразованием.

Пусть $f : R \to R'$ - любое проективное преобразование. Тогда $f^{-1} : R' \to R$. Возьмем любую точку плоскости M', и пусть $M = f^{-1}(M')$. Тогда $M' = f(M)$. Так как f - проективное преобразование, то из $M(x_1,\, x_2,\, x_3)_R$ следует $M'(x_1,\, x_2,\, x_3)_{R'}$. Таким образом, преобразование f^{-1} отображает репер R' на репер R и точку M' с координатами $(x_1, x_2, x_3)_{R'}$ отображает в точку M с теми же координатами $(x_1, x_2, x_3)_R$. По определению, f^{-1} - проективное преобразование. ■

Наличие групповых свойств у проективных преобразований позволяет разбить множество всех фигур проективной плоскости на классы проективно-эквивалентных фигур.

Определение. Будем говорить, что фигура Φ' *проективно-эквивалентна* фигуре Φ, если существует проективное преобразование, отображающее фигуру Φ на фигуру Φ'.

***Теорема 2*. Проективная эквивалентность фигур является отношением эквивалентности, т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности**.

Доказательство предоставляется читателю.

Проективная геометрия - это такая геометрическая теория, которая изучает общие свойства проективно-эквивалентных фигур, т.

е. те свойства и числовые величины, которые не изменяются при всех проективных преобразованиях.

2. Некоторые свойства проективных преобразований.

Определение. Точки A, B, C, D называются *четверкой точек общего положения*, если никакие три из них не лежат на одной прямой.

Пример. Всякий проективный репер представляет собой четверку точек общего положения.

Теорема 3. *(О задании проективного преобразования).* **Пусть A, B, C, D и A', B', C', D' - две четверки точек общего положения. Тогда существует, и притом единственное, проективное преобразование плоскости, которое отображает точки A, B, C, D соответственно в точки A', B', C', D'.**

Доказательство. Существование следует из того, что эти четверки можно принять за проективные реперы R и R'. Тем самым проективное преобразование определится. Единственность следует из леммы, рассмотренной в начале параграфа.

Теорема 4. *(формулы проективного преобразования).* **Всякое проективное преобразование плоскости вполне определяется уравнениями:**

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{1.11.1}$$

где $|(a_{ij})| \neq 0)$, $(i, j = 1, 2, 3)$.

Доказательство.

1) Пусть $f : R \to R'$ - некоторое проективное преобразование и $M(x_1,\, x_2,\, x_3)_R$ - любая произвольно выбранная точка плоскости. Найдем $M' = f(M)$, и пусть $M'(x_1',\, x_2',\, x_3')_R$. С другой стороны, так как f - проективное преобразование плоскости, то $M'(x_1,\, x_2,\, x_3)_{R'}$. Имеем координаты точки M' относительно двух проективных реперов (относительно R - старые, относительно R' - новые). Воспользуемся формулами преобразования однородных проективных координат (§4), применив их к точке M':

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= \lambda_1 c_{11}x_1 + \lambda_2 c_{12}x_2 + \lambda_3 c_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= \lambda_1 c_{21}x_1 + \lambda_2 c_{22}x_2 + \lambda_3 c_{23}x_3, \end{aligned}$$

$$\rho x_3' = \lambda_1 c_{31} x_1 + \lambda_2 c_{32} x_2 + \lambda_3 a_{33} x_3.$$

Введем обозначение: $\lambda_i c_{ij} = a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Тогда получим формулы (1). При этом $|(a_{ij})| = |(\lambda_i c_{ij})| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 |c_{ij}| \neq 0$, так как $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – ненулевые множители и $|(c_{ij})| \neq 0$.

2) Верно и обратное утверждение: если преобразование f задано формулами (1), то оно является проективным преобразованием (без доказательства). ■

***Теорема 5*. Проективное преобразование проективной плоскости всякую прямую отображает на прямую.**

Доказательство. Пусть $f : R \to R'$ – проективное преобразование и ℓ – некоторая прямая, имеющая уравнение $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ относительно проективного репера R. Это значит,что прямая ℓ представляет собой множество всех точек M, координаты $(x_1, x_2, x_3)_R$ которых удовлетворяют этому уравнению. По определению проективного преобразования образы M' точек $M \in \ell$ имеют ту же тройку координат $(x_1, x_2, x_3)_{R'}$ и поэтому множество ℓ' точек M' определяется тем же уравнением, следовательно, является прямой. ■

1.12 Проективные отображения и преобразования прямых

Определение. Пусть имеются прямые ℓ и ℓ' на проективной плоскости и $R = \{A_1, A_2, E\}$ и $R' = \{A_1', A_2', E'\}$ - проективные реперы на прямых ℓ и ℓ'. Тогда отображение f прямой ℓ на прямую ℓ', которое всякой точке $M \in \ell$ с координатами (x_1, x_2) относительно репера R ставит в соответствие точку $M' \in \ell'$, имеющую те же координаты (x_1, x_2) относительно репера R', называется *проективным отображением прямой ℓ на прямую ℓ'.*

Если прямая ℓ' совпадает с прямой ℓ, то проективное отображение f называется *проективным преобразованием прямой ℓ.*

***Теорема 1.* Если f - проективное отображение прямой ℓ на прямую ℓ', то обратное отображение f^{-1} есть проективное отображение прямой ℓ' на прямую ℓ.**

***Теорема 2.* Если f - проективное отображение прямой ℓ на прямую ℓ', а g - проективное отображение прямой ℓ' на**

прямую ℓ'', то композиция отображений $g \circ f$ есть проективное отображение прямой ℓ на прямую ℓ''.

Теорема 3. **Множество всех проективных преобразований прямой есть группа относительно композиции преобразований.**

Теоремы 1, 2, 3 доказываются аналогично доказательству теоремы о группе проективных преобразований плоскости.

Теорема 4. **Пусть A, B, C и A', B', C' - две тройки точек на прямых ℓ и ℓ' соответственно. Тогда существует, и притом единственное, проективное отображение прямой ℓ на прямую ℓ', которое при этом отображает A в A', B в B', C в C'.**

Теорема 5. **Проективное преобразование прямой вполне определяется формулами:**

$$\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$\rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

где $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Теоремы 4, 5 доказываются так же, как соответствующие теоремы в параграфе 1.11.

Теорема 6. *(О связи проективного преобразования плоскости с проективным отображением прямых).* **Пусть f - проективное преобразование плоскости и ℓ - некоторая прямая. Тогда отображение прямой ℓ на прямую $\ell' = f(\ell)$, определяемое преобразованием f, является проективным.**

Доказательство. Введем на плоскости проективную систему координат $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ так, чтобы $A_1 \in \ell$, $A_2 \in \ell$, $A_3 \notin \ell$, $E \notin \ell$. Пусть $A_1' = f(A_1)$, $A_2' = f(A_2)$, $A_3' = f(A_3)$, $E' = f(E)$ и $\ell' = f(\ell)$. Очевидно $A_1' \in \ell'$, $A_2' \in \ell'$, $A_3' \notin \ell'$, $E' \notin \ell'$.

Таким образом, данное проективное преобразование плоскости будет задано проективными реперами $R = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ E\}$, $R' = \{A_1',\ A_2',\ A_3',\ E'\}$, при этом любая точка $M(x_1, x_2, x_3)_R$ отображается в точку $M'(x_1,\ x_2,\ x_3)_{R'}$.

Найдем точки $E_3 = A_3E \cap A_1A_2$, $E_3' = A_3'E' \cap A_1'A_2'$. Очевидно, $E_3' = f(E_3)$. Рассмотрим на прямых ℓ и ℓ' соответственно проективные реперы $R_3 = \{A_1, A_2, E_3\}$, $R_3' = \{A_1', A_2', E_3'\}$. Преобразование f отображает репер R_3 на репер R_3'.

Пусть точка $M \in \ell$, тогда $M(x_1, x_2, 0)_R$ или $(x_1, x_2)_{R_3}$. Образ M' точки M принадлежит прямой ℓ' и имеет координаты

$(x_1, x_2, 0)_{R'}$ или
$(x_1, x_2)_{R_3'}$. Таким образом, в проективном преобразовании f плоскости прямая ℓ так отображается на прямую ℓ', что всякая точка $M(x_1, x_2,)_{R_3}$ переходит в точку $M'(x_1, x_2)_{R_3'}$. По определению проективного отображения прямой на прямую это отображение прямой ℓ на прямую ℓ' является проективным. ■

1.13 Перспективные отображения прямых и пучков

1. Проективные координаты прямых в пучке. Проективное отображение пучков.

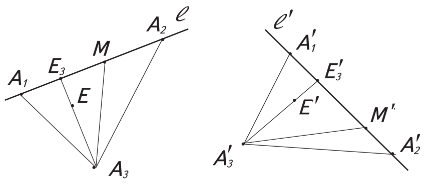

Рис. 11.

Как установленно ранее, на проективной плоскости справедлив принцип двойственности. Благодаря этому в каждом пучке прямых можно естественным образом ввести понятия проективной системы координат (проективного репера) и проективных координат прямой. Так, каждая прямая на проективной плоскости определяется однородным уравнением первой степени $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Коэффициенты u_1, u_2, u_3 называются координатами прямой и дают вектор $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, называемый представителем прямой.

Определение 1. Проективным репером $r = \{a_1, a_2, e\}$ в пучке называется множество, состоящее из трех прямых a_1, a_2, e пучка, при этом векторы-представители $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{e}$ этих прямых связаны соотношением $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{e}$.

Определение 2. Проективными координатами прямой m пучка прямых называются координаты ее вектора-представителя относительно базиса $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.

По принципу двойственности справедливы теоремы, двойственные теоремам о проективных координатах точки на прямой.

Проективные отображения и преобразования пучков также определяются как двойственные понятия к проективным отображениям и преобразованиях прямых. По принципу двойственности справедливы теоремы, двойственные теоремам 1-5 о свойствах проективных отображений и преобразований прямых.

2. Перспективные отображения.

Обозначение. $\Pi(L)$ - пучок прямых с центром L.

Определение 1. Перспективным отображением прямой ℓ на пучок прямых $\Pi(L)$ называется отображение, которое всякой точке $M \in \ell$ ставит в соответствие прямую $LM \in \Pi(L)$.

***Теорема 1.* Перспективное отображение прямой ℓ на пучок $\Pi(L)$ является проективным.**

Доказательство. Выберем на плоскости проективный репер R так, чтобы точки $A_1 \in \ell$, $A_2 \in \ell$, $A_3 \notin \ell$, $E \notin \ell$. На прямой ℓ в качестве проективного репера R_3 возьмем тройку точек A_1, A_2, E_3, где $E_3 = LE \cap \ell$. Реперу R_3 соответствует в пучке $\Pi(L)$ репер $r_3=\{LA_1, LA_2, LE\}$. Пусть M - любая точка прямой ℓ и $M(m_1, m_2)_{R_3}$ или $M(m_1, m_2, 0)_R$. Точке $M \in \ell$ соответствует в пучке $\Pi(L)$ прямая LM. Покажем, что координаты прямой LM в пучке $\Pi(L)$ относительно репера r_3 те же (m_1, m_2), что и у точки M на прямой ℓ.

Прямая LA_1 имеет уравнение $x_2 = 0$ относительно плоскостного репера R. Следовательно, прямой LA_1 соответствует вектор-представитель $\vec{a}_1(0, 1, 0)$. Уравнение прямой LA_2 $x_1 = 0$ и ее вектор-представитель $\vec{a}_2(1, 0, 0)$. Составим уравнение прямой LE:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или $x_1 - x_2 = 0$. Значит, вектор-представитель единичной прямой LE есть $\vec{e}_3$ (1,–1,0) и он связан с векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ соотношением $\vec{e}_3 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Поэтому в качестве векторов, представляющих базисные прямые LA_1 и LA_2 проективного репера r_3 в пучке прямых $\Pi(L)$, возьмем векторы $\overrightarrow{-a_1}$, $\vec{a_2}$. Теперь найдем координаты прямой LM в пучке $\Pi(L)$ относительно репера r_3. Составим уравнение прямой LM:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или $m_2 x_1 - m_1 x_2 = 0$ и обозначим $\vec{m}(m_2, -m_1, 0)$ – представитель прямой LM. Разложим вектор $\vec{m}$ по базису $\{-\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. Пусть $\vec{m} = \alpha(-\vec{a}_1) + \beta\vec{a}_2$ или $(m_2, -m_1, 0) = \alpha(0, -1, 0) + \beta(1, 0, 0)$. Откуда находим: $m_2 = \beta$, $m_1 = \alpha$. Таким образом, $\vec{m} = m_1(-\vec{a}_1) + m_2(\vec{a}_2)$. А это означает, что $LM(m_1, m_2)_{r_3}$. ■

Определение 2. Перспективным отображением пучка прямых (L) *на прямую* ℓ называется отображение, которое всякой прямой $m \subset \Pi(L)$ ставит в соответствие точку $M = m \cap \ell$.

Теорема 2. **Перспективное отображение пучка** $\Pi(L)$ **на прямую** ℓ **является проективным.**

Эта теорема справедлива по принципу двойственности как теорема, двойственная теореме 1.

Определение 3. Перспективным отображением прямой ℓ *на прямую* ℓ' *с центром перспективы* L называется отображение, которое всякой точке $M \in \ell$ ставит в соответствие такую точку $M' \in \ell'$, что $M' = LM \cap \ell'$.

Теорема 3. **Перспективное отображение прямой** ℓ **на прямую** ℓ' **является проективным отображением.**

Доказательство. Пусть f - перспективное отображение прямой ℓ на прямую ℓ' с центром перспективы L. Очевидно, оно является композицией перспективных отображений: $\varphi : \ell \to \Pi(L)$ и $\psi : \Pi(L) \to \ell'$. Каждое из отображений φ и ψ является проективным (теоремы 1, 2). Следовательно, если $R = \{A_1, A_2, E\}$ — проективный репер на прямой ℓ, $R' = \{A'_1, A'_2, E'\}$ - соответствующий ему репер на прямой ℓ' и $r = \{LA_1, LA_2, LE\}$ - соответствующий репер в пучке $\Pi(L)$, то всякой точке M, имеющей координаты (x_1, x_2) относительно репера R, отображение φ ставит в соответствие прямую LM с теми же координатами (x_1, x_2) относительно репера r, а отображение ψ прямой $LM(x_1, x_2)$ ставит в соответствие точку M' с теми же координатами (x_1, x_2) относительно репера R'. Таким образом, перспективное отображение $f = \psi \circ \varphi$ любой точке $M(x_1, x_2)_R$ ставит в соответствие точку $M'(x_1, x_2)_{R'}$, а поэтому является проективным. ■

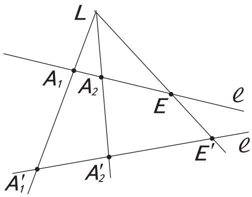

Рис. 12.

Определение 4. Перспективным отображением пучка $\Pi(L)$ *на пучок* $\Pi(L')$ *с осью перспективы* ℓ называется отображение, которое всякой прямой $m \in \Pi(L)$ ставит в соответствие такую прямую $m' \in \Pi(L')$, которая соединяет точку L' с точкой пересечения $m \cap \ell$.

Теорема 4. **Перспективное отображение пучка прямых $\Pi(L)$ на пучок прямых $\Pi(L')$ является проективным.**

Эта теорема справедлива по принципу двойственности как предложение, двойственное теореме 3.

Заметим: так как всякое перспективное отображение является проективным, то композиция любого числа перспективных отображений прямых и пучков является проективным отображением.

Теорема 5. *(Условие перспективности проективного отображения).* **Для того, чтобы проективное отображение прямой ℓ на прямую ℓ' (пучка $\Pi(L)$) на пучок $\Pi(L')$) было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы точка пересечения прямых ℓ и ℓ' (прямая, соединяющая центры L и L') соответствовала сама себе.**

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f : \ell \to \ell'$ – перспективное отображение и L - центр перспективы. Тогда по определению 3 перспективного отображения точка $C = \ell \cap \ell'$ соответствует сама себе.

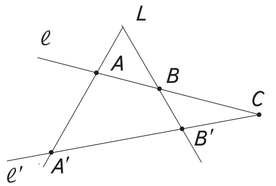

Рис. 13.

Достаточность. Пусть $f : \ell \to \ell'$ – проективное отображение, которое точку $C = \ell \cap \ell'$ отображает на себя.Возьмем точки $A \in \ell$,$B \in \ell$ и найдем образы $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ на прямой ℓ'. Построим точку $L = AA' \cap BB'$ и рассмотрим перспективное отображение g с центром перспективы L. Оно переводит точку A в точку A', точку B в точку B' и точку C в себя. По теореме 3 оно также является проективным. Получим, что отображение g, так же, как и отображение f тройку точек A, B, C прямой ℓ переводит в тройку точек A', B', C' прямой ℓ' и оба отображения являются проективными. По теореме о задании проективного отображения прямых, отображения f и g совпадают.

Таким образом, проективное отображение f является перспективным. ■

Теорема 6. *(Основная.)* **Всякое проективное отображение прямой ℓ на прямую ℓ' можно представить как композицию не более двух перспективных отображений прямых.**

Доказательство. Пусть $f : \ell \to \ell'$ – проективное отображение. Если оно перспективно, то теорема доказана. Пусть отображение f не является перспективным. Зададим его двумя тройками точек A, B, C прямой ℓ и A', B', C' прямой ℓ', при этом $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Построим вспомогательную прямую $\ell_0 = B_0C_0$, где $B_0 = AB' \cap A'B$, $C_0 = AC' \cap A'C$, и найдем $A_0 = AA' \cap \ell_0$. Рассмотрим два перспективных отображения: $\varphi : \ell \to \ell_0$ с центром перспективы A', $\psi : \ell_0 \to \ell'$ с центром перспективы A. Покажем, что $\psi \circ \varphi = f$.

Действительно, отображение φ переводит тройку точек A, B, C прямой ℓ в тройку точек A_0, B_0, C_0 прямой ℓ_0, а отображение ψ переводит далее тройку точек A_0, B_0, C_0 прямой ℓ_0 в тройку точек A', B', C' прямой ℓ'. Следовательно, композиция $\psi \circ \varphi$, так же, как и отображение f, переводит тройку точек A, B, C прямой ℓ в тройку точек A', B', C' прямой ℓ'. Оба этих отображения являются проективными, поэтому по теореме о задании проективного отображения они совпадают. ■

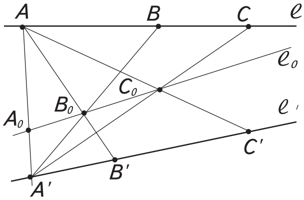

Рис. 14.

Следствие. **Всякое проективное преобразование прямой можно представить, как композицию не более трех перспективных отображений.**

По принципу двойственности получим теорему и следствие о проективном отображении пучков.

3. *Построение соответственных элементов проективного отображения.*

Задача 1.

Дано: $f : \ell \to \ell'$ - проективное отображение, заданное тройками точек A, B, C прямой ℓ и A', B', C' прямой ℓ' и $M \in \ell$.

Построить: $M' = f(M)$.

Решение. *Построение.*

Строим:

1) $\ell_0 = B_0C_0$: $B_0 = AB' \cap A'B$, $C_0 = AC' \cap A'C$;

2) $M_0 = A'M \cap \ell_0$;

3) $M' = AM_0 \cap \ell'$, M' -искомая.

Доказательство.

$M' = (\psi \circ \varphi)(M) = f(M)$

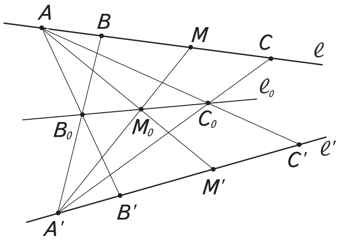

Рис. 15.

Задача 2.

Дано: $f : \Pi(L) \to \Pi(L')$ - проективное отображение, заданное тройками прямых a, b, c пучка $\Pi(L)$ и a', b', c' пучка $\Pi(L')$, и дана прямая $m \in \Pi(L)$.

Построить: $m' = f(m)$.

Построение провести самостоятельно, пользуясь двойственностью.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1 Двойное (сложное) отношение

Определение 1. Пусть точки A, B, C, D лежат на прямой ℓ и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ - их представители, при этом $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\vec{d} = \nu\vec{a} + \rho\vec{b}$. *Двойным (сложным) отношением* (AB, CD) *точек* A, B, C, D называется выражение:

$$(AB, CD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\rho}{\nu}\ , \tag{2.1.1}$$

где A, B - называются *базисными точками*; C, D - *делящими точками.*

Как двойственное понятие определяется *двойное (сложное) отношение четырех прямых*, принадлежащих одному пучку.

Пример.

Дано: $A(1, 0, -1)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(3, -1, -4)$, $D(0, -1, -1)$.

Проверить, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой и найти (AB, CD).

Решение. Составим уравнение прямой AB.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

или $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Проверим, что $C \in AB$. Для этого подставим координаты точки C в уравнение прямой AB. Получим верное равенство: 3-(-1)-4=0. Значит, $C \in AB$. Аналогично проверяется, что $D \in AB$. Далее составим разложение:

$$(3, -1, 4) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(-2, 1, 3).$$

Откуда имеем

$$3 = \lambda - 2\mu, \ -1 = \mu$$

и найдем $\mu = -1$, $\lambda = 1$. Аналогично, из разложения

$$(0, -1, -1) = \nu(1, 0, -1) + \rho(-2, 1, 3)$$

найдем $\rho = -1$, $\nu = -2$. Вычислим, пользуясь формулой (1):

$$(AB, CD) = \frac{-1}{1} : \frac{-1}{-2} = -2.$$

Теорема 1. **Двойное отношение точек (прямых) не зависит от выбора их векторов-представителей (координат).**

Доказательство. Докажем теорему для двойного отношения (AB, CD) точек. Заменим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на другие представители: $\vec{a}' = \alpha\vec{a}$, $\vec{b}' = \beta\vec{b}$ и составим разложения:

$$\begin{array}{rcl} \vec{c} & = & \lambda'\vec{a}' + \mu'\vec{b}', \\ \vec{d} & = & \nu'\vec{a}' + \rho'\vec{b}'. \end{array}$$

Тогда двойное отношение

$$(AB, CD) = \frac{\mu'}{\lambda'} : \frac{\rho'}{\nu'}.$$

Заменим в разложениях векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ векторы $\vec{a'}$ и $\vec{b}'$. Получим

$$\begin{array}{rcl} \vec{c} & = & (\lambda'\alpha)\vec{a} + (\mu'\beta)\vec{b}, \\ \vec{d} & = & (\nu'\alpha)\vec{a} + (\rho'\beta)\vec{b}. \end{array}$$

В силу единственности разложения векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем:

$$\lambda'\alpha = \lambda,\ \mu'\beta = \mu,\ \nu'\alpha = \nu,\ \rho'\beta = \rho.$$

Отсюда найдем:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\beta}, \quad \nu' = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\beta}.$$

Снова вычислим

$$(AB, CD) = \frac{\mu'}{\lambda'} : \frac{\rho'}{\nu'} = \frac{\mu\alpha}{\lambda\beta} : \frac{\rho\alpha}{\nu\beta} = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\rho}{\nu}.$$

2) Заменим теперь векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ на другие представители $\vec{c'} = \alpha\vec{c}$, $\vec{d'} = \beta\vec{d}$ и составим разложения:

$$\begin{aligned} \vec{c'} &= \lambda'\vec{a} + \mu'\vec{b}, \\ \vec{d'} &= \nu'\vec{a} + \rho'\vec{b}. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\vec{c} = \Big(\frac{\lambda'}{\alpha}\Big)\vec{a} + \Big(\frac{\mu'}{\alpha}\Big)\vec{b}, \quad \vec{d} = \Big(\frac{\nu'}{\beta}\Big)\vec{a} + \Big(\frac{\rho'}{\beta}\Big)\vec{b}.$$

Здесь

$$\frac{\lambda'}{\alpha} = \lambda, \quad \frac{\mu'}{\alpha} = \mu, \quad \frac{\nu'}{\beta} = \nu, \quad \frac{\rho'}{\beta} = \rho.$$

Найдем по формуле (1)

$$(AB, CD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\rho}{\nu} = \frac{\mu'\alpha}{\lambda'\alpha} : \frac{\rho'\beta}{\nu'\beta} = \frac{\mu'}{\lambda'} : \frac{\rho'}{\nu'}. \quad \blacksquare$$

Теорема 2. **Двойное отношение (AB, CD) равно неоднородной проективной координате точки D относительно репера $R = \{A, B, C\}$, т. е.**

$$(AB, CD) = \frac{d_1}{d_2}, \tag{2.1.2}$$

где d_1, d_2 - проективные (однородные) координаты точки D относительно репера R.

Доказательство. Так как точки A, B, C образуют проективный репер, то их векторы-представители связаны соотношением $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. По определению

$$D(d_1,d_2) \Leftrightarrow \vec{d} = d_1\vec{a} + d_2\vec{b}$$

Итак, имеем:

$$\lambda = 1,\ \mu = 1,\ \nu = d_1,\ \rho = d_2.$$

Тогда

$$(AB,CD) = \frac{1}{1} : \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_2}. \quad \blacksquare$$

По принципу двойственности справедлива теорема, двойственная теореме 2 для двойного отношения (ab,cd) четырех прямых.

Теорема 3. *(Об инвариантности двойного отношения).* **Проективное преобразование плоскости сохраняет двойное отношение четырех точек (прямых).**

Доказательство (*для точек*). Пусть f - проективное преобразование плоскости и $A,\ B,\ C,\ D$ - любые четыре точки, лежащие на прямой ℓ, а $A',\ B',\ C',\ D'$ - их образы, лежащие на прямой $\ell' = f(\ell)$. Так как точки A и A', B и B', C и C', D и D' попарно имеют одни и те же тройки координат относительно соответственно проективных реперов R, $R' = f(R)$, задающих проективное преобразование, то $(AB,CD) = (A'B',C'D')$. $\blacksquare$

Теорема 4. **Если преобразование f проективной плоскости не изменяет двойного отношения четырех точек, то оно является проективным.**

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 5. **Пусть на прямой ℓ заданы проективный репер $R = \{A_1, A_2, E\}$ и точки A, B, C, D, при этом $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, $D(d_1,d_2)$. Тогда справедлива формула**

$$(AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}. \tag{2.1.3}$$

Доказательство. Составим разложения:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},$$
$$\vec{d} = \nu\vec{a} + \rho\vec{b}$$

Тогда имеем:

$$(c_1, c_2) = \lambda(a_1, a_2) + \mu(b_1, b_2),$$
$$(d_1, d_2) = \nu(a_1, a_2) + \rho(b_1, b_2).$$

Откуда получим две системы уравнений

$$\begin{cases} c_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ c_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} d_1 = \nu a_1 + \rho b_1 \\ d_2 = \nu a_2 + \rho b_2 \end{cases}.$$

Решая эти системы по формулам Крамера, получим

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \mu = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \nu = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \rho = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Вычислим (AB, CD) по формуле (1):

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}.$$

Теорема 6. **Пусть точки A, B, C, D лежат на прямой ℓ и**

$$a = \frac{a_1}{a_2},\ b = \frac{b_1}{b_2},\ c = \frac{c_1}{c_2},\ d = \frac{d_1}{d_2}$$

- неоднородные проективные координаты этих точек относительно репера $R = \{A_1, A_2, E\}$. Тогда

$$(AB, CD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}. \tag{2.1.4}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.1.3). Для этого вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_2 c_2 \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_2} & 1 \\ \frac{c_1}{c_2} & 1 \end{vmatrix} = a_2 c_2 \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix} = a_2 c_2 (a - c) = -a_2 c_2 (c - a).$$

Аналогично найдем другие определители:

$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -b_2c_2(c-b)$, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = -a_2d_2(d-a)$, $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} =$ $-b_2d_2(d-b)$.

Подставим найденные значения определителей в формулу (2.1.3). Получим

$$(AB, CD) = \frac{-a_2c_2(c-a)}{-b_2c_2(c-b)} : \frac{-a_2d_2(d-a)}{-b_2d_2(d-b)} = \frac{(c-a)}{(c-b)} : \frac{(d-a)}{(d-b)}.$$

Замечание. По принципу двойственности справедливы теоремы, двойственные теоремам 5, 6 для двойного отношения прямых.

Свойства двойного отношения.

1°. Двойное отношение не изменится, если поменять местами пары базисных и делящих точек:

$$(CD, AB) = (AB, CD)$$

2°. Если поменять местами точки в одной паре (либо базисные, либо делящие), то двойное отношение изменится на обратное:

$$(AB, DC) = \frac{1}{(AB, CD)}$$

3°. Двойное отношение не изменится, если одновременно переставить местами точки в обеих парах:

$$(BA, DC) = (AB, CD)$$

4°. Двойное отношение изменится на дополнительное, если переставить местами точки B и C или точки A и D:

$$(AC, BD) = 1 - (AB, CD);\ (DB, CA) = 1 - (AB, CD)$$

5°. Для четырех точек A, B, C, D прямой ℓ существует шесть различных двойных отношений:

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ 1-\alpha,\ \frac{1}{1-\alpha},\ 1-\frac{1}{\alpha},\ \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Доказательство свойства 4°. Воспользуемся формулой (2.1.4).

$$(AC, BD) = \frac{b-a}{b-c} : \frac{d-a}{d-c} = \frac{b-c+c-a}{b-c} \cdot \frac{d-b+b-c}{d-a} =$$

$$\left(1 - \frac{c-a}{c-b}\right)\left(\frac{d-b}{d-a} - \frac{c-b}{d-a}\right) = \frac{d-b}{d-a} - \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a} - \frac{c-b}{d-a} +$$

$$\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{c-b}{d-a} = \left(\frac{d-b}{d-a} - \frac{c-b}{d-a} + \frac{c-a}{d-a}\right) - \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

$= 1 - (AB, CD)$. ■

Доказательство свойства 5°. Пусть $(AB, CD) = \alpha$. Найдем

$$(AB, DC) = \frac{1}{\alpha}$$

(свойство 2°) и

$$(AC, BD) = 1 - \alpha$$

(свойство 4°). Применив к двойному отношению (AB, DC) свойство 4°, получим

$$(AD, BC) = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha},$$

а из двойного отношения (AC, BD) найдем

$$(AC, DB) = \frac{1}{1-\alpha}$$

(свойство 2°). И, наконец, снова воспользовавшись свойством 2°, применив его к двойному отношению (AD, BC), получим

$$(AD, CB) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Из свойств 1° и 3° следует, что каждое из оставшихся двойных отношений равно одному из найденных двойных отношений.

Доказательство свойств 1° – 3° двойного отношения предоставляется читателю. При доказательстве используются формулы (2.1.1)-(2.1.4).

По принципу двойственности справедливы аналогичные свойства для двойного отношения прямых.

Теорема 7. **Пусть прямые** a, b, c, d **проходят через точку** L **и пересекают некоторую прямую** ℓ **в точках** A, B, C, D **соответственно. Тогда** $(AB, CD) = (ab, cd)$

Доказательство. Выберем на проективной плоскости проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ так, чтобы $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = L$, $E \in LC$. Точки A, B, L имеют координаты $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $L(0, 0, 1)$, а прямые ℓ, a, b определяются соответственно уравнениями $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$. Следовательно, прямые a и b имеют координаты: $a(0, 1, 0)$, $b(1, 0, 0)$. Для того, чтобы подсчитать двойные отношения точек (AB, CD) и прямых (ab, cd), надо знать еще координаты точек C, D и прямых c, d. Найдем их. Так как прямая $c = A_3E$, то ее уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или $x_1 - x_2 = 0$. Итак, прямая $c(1, -1, 0)$. Далее, так как точка $C = c \cap \ell$, то ее координаты являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, точка $C(1, 1, 0)$. Так как точка $D \in A_1A_2$, то $D(d_1, d_2, 0)$. Составим уравнение прямой $d = A_3D$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или $d_2x_1 - d_1x_2 = 0$. Следовательно, прямая $d(d_2, -d_1, 0)$. Для нахождения двойного отношения (AB, CD) воспользуемся формулой (2.1.1), для чего составим разложения

$$\begin{aligned} (1, 1, 0) &= \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0), \\ (d_1, d_2, 0) &= \nu(1, 0, 0) + \rho(0, 1, 0). \end{aligned}$$

Откуда получим:

$$\lambda = 1,\ \mu = 1,\ \nu = d_1,\ \rho = d_2.$$

Тогда
$$(AB,CD) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\rho}{\nu} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Для нахождения двойного отношения прямых (ab,cd) составим разложения

$$\begin{array}{rcl} (1,-1,0) & = & \lambda(0,1,0) + \mu(1,0,0), \\ (d_2,-d_1,0) & = & \nu(0,1,0) + \rho(1,0,0). \end{array}$$

Откуда получим:

$$\lambda = -1,\ \mu = 1,\ \nu = -d_1,\ \rho = d_2.$$

Тогда
$$(ab,cd) = \frac{1}{-1} : \frac{d_2}{-d_1} = \frac{d_1}{d_2} = (AB,CD). \quad \blacksquare$$

Двойное отношение точек и прямых на евклидовой плоскости.

Рассмотрим евклидову плоскость. Так как однородные координаты точки относительно аффинной системы координат являются частным случаем проективных координат, то для вычисления двойного отношения точек на евклидовой плоскости можно воспользоваться всеми формулами (2.1.1)-(2.1.4). Найдем еще одну формулу.

Пусть точки A, B, C, D лежат на прямой ℓ, и a, b, c, d — их аффинные координаты соответственно относительно аффинной системы координат $\{0,\vec{e}\}$. Тогда $\overrightarrow{OA} = a\vec{e}$, $\overrightarrow{OB} = b\vec{e}$, $\overrightarrow{OC} = c\vec{e}$, $\overrightarrow{OD} = d\vec{e}$, где $\vec{e}$ - единичный вектор. Найдем векторы $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = c\vec{e} - a\vec{e} = (c-a)\vec{e}$, $\overrightarrow{BC} = (c-b)\vec{e}$, $\overrightarrow{AD} = (d-a)\vec{e}$, $\overrightarrow{BD} = (d-b)\vec{e}$. Тогда
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{c-a}{c-b}, \quad \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{d-a}{d-b}$$

и поэтому из формулы (2.1.4) получим новую формулу:

$$(AB,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \tag{2.1.5}$$

для двойного отношения четырех точек на евклидовой плоскости.

Определение. Простым отношением (AB, C) трех точек A, B, C лежащих на прямой ℓ, называется отношение коллинеарных векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, т. е.

$$(AB, C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

В таком случае можно выразить двойное отношение (AB, CD) через простые отношения по формуле

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}. \qquad (2.1.6)$$

Теорема 8. **Если A, B, C - три точки, лежащие на расширенной прямой ℓ, и D_∞ - несобственная точка прямой ℓ, то**

$$(AB, C) = (AB, CD_\infty) \qquad (2.1.7)$$

Доказательство. Так как

$$(AB, CD_\infty) = \lim_{D \longrightarrow D_\infty} (AB, CD),$$

и $\lim\limits_{D \longrightarrow D_\infty} (AB, D) = \lim\limits_{D \longrightarrow D_\infty} \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \lim\limits_{D \longrightarrow D_\infty} \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BD}} = \lim\limits_{D \longrightarrow D_\infty} \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BD}} + 1 = 1$, то

$$(AB, CD_\infty) = \lim_{D \longrightarrow D_\infty} \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = (AB, C). \quad \blacksquare$$

Теорема 9. **Двойное отношение (ab, cd) четырех прямых a, b, c, d одного пучка равно:**

$$(ab, cd) = \frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} : \frac{k_4 - k_1}{k_4 - k_2}, \qquad (2.1.8)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 - угловые коэффициенты соответственно прямых a, b, c, d.

Доказательство. Пусть центр пучка прямых, которому принадлежат данные прямые, находится в начале координат прямоугольной декартовой системы координат $O\vec{i}\vec{j}$. Тогда уравнения данных прямых имеют вид: $y = k_1 x$, $y = k_2 x$, $y = k_3 x$, $y = k_4 x$

соответственно. Проведем прямую ℓ, параллельную оси $O\vec{j}$ через точку $S(1,0)$, ее уравнение - $x=1$. Прямая ℓ пересекает прямые a, b, c, d соответственно в точках $A(1,k_1)$, $B(1,k_2)$, $C(1,k_3)$, $D(1,k_4)$. Относительно системы координат $O\vec{j}$ на прямой ℓ эти точки имеют координаты $A(k_1)$, $B(k_2)$, $C(k_3)$, $D(k_4)$. По формуле (2.1.4) найдем:

$$(AB,CD)=\frac{k_3-k_1}{k_3-k_2}:\frac{k_4-k_1}{k_4-k_2}.$$

По теореме (7) $(ab,cd)=(AB,CD)$. Откуда получаем искомую формулу (2.1.8). ■

Замечание 1. Двойное отношение (ab,cd) не зависит от расположения центра L пучка прямых на плоскости.

Читателю предлагается провести вывод формулы (2.1.8) для общего случая, когда $L(x_0,y_0)$.

Замечание 2. Если одна из прямых a, b, c, d (например, прямая d) параллельна оси Oy, то она не имеет углового коэффициента. В таком случае

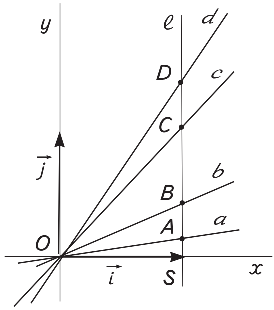

Рис. 16.

$$(ab,cd)=\lim_{k\longrightarrow\infty}\left(\frac{k_3-k_1}{k_3-k_2}:\frac{k-k_1}{k-k_2}\right).$$

Двойное отношение прямых a, b, c, d одного пучка прямых может быть найдено также по формуле

$$(ab,cd)=\frac{\sin\angle(c,a)}{\sin\angle(c,b)}:\frac{\sin\angle(d,a)}{\sin\angle(d,b)}. \qquad (2.1.9)$$

2.2 Гармонические четверки точек и прямых

Определение. Говорят, что четыре точки A, B, C, D лежащие на одной прямой и взятые в указанном порядке, образуют *гармоническую четверку точек*, если двойное отношение $(AB,CD)=-1$.

Точка D называется *четвертой гармонической точкой* к точкам A, B, C. Говорят также, что пара C, D *гармонически разделяет* пару A, B.

Гармоническая четверка прямых определяется как двойственное понятие.

Теорема. **Для любых точек A, B, C одной прямой всегда существует, и притом единственная, четвертая гармоническая точка D.**

Доказательство. На прямой ℓ выберем проективный репер так, чтобы точки A и B были базисными, а точка C единичной точкой, и возьмем в качестве точки D точку с координатами $(1, -1)$. Тогда $(AB, CD) = \frac{1}{-1} = -1$, значит, точка D - четвертая гармоническая. Точка D единственная.

Действительно, предположим, что существует еще одна четвертая гармоническая точка D' к точкам A, B, C, и пусть $D'(d_1, d_2)$. Тогда $(AB, CD^{'}) = \frac{d_1}{d_2}$ и так как $(AB, CD^{'})$ также равно -1, то $d_2 = -d_1$, т. е. $D'(d_1, -d_1)$. Проективные координаты определяются с точностью до ненулевого множителя, и поэтому $D'(1, -1)$ имеет те же координаты, что и точка D. Точка $D^{'}$ совпадает с точкой D. ■

Задача. *Построение четвертой гармонической точки (способ 1).*

Дано: $A \in \ell$, $B \in \ell$, $C \in \ell$

Построить D – четвертую гармоническую точку к точкам A, B, C.

Решение. *Построение.* Примем точки A, B за базисные, точку C за единичную и точку D построим по координатам (1, -1).

Строим:

1. S -произвольно; $S \notin \ell$;
2. SA, SB, SC;
3. $\vec{e} || SC$;
4. $\vec{a} || SA$, $\vec{b} || SB$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{e}$;
5. $\overrightarrow{SQ} = \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$;
6. $D = (SQ) \cap \ell$.

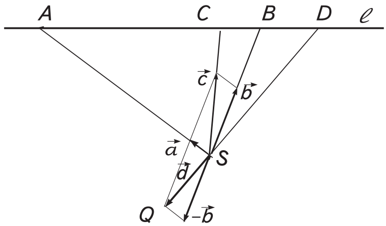

Рис. 17.

Свойства гармонических четверок точек.

1°. Если A, B, C, D - гармоническая четверка точек, то и C, D,

B, A - гармоническая четверка точек.

2°. Если A, B, C, D - гармоническая четверка точек, то и A, B, D, C - гармоническая четверка точек.

3°. Если A, B, C, D - гармоническая четверка точек, то и B, A, D, C - гармоническая четверка точек.

Эти свойства вытекают из соответствующих свойств двойного отношения, рассмотренных в предыдущем параграфе.

По принципу двойственности справедливы теоремы и свойства для гармонических четверок прямых.

2.3 Гармонические свойства четырехвершинников и четырехсторонников

Определение. Четырехвершинником $XYZW$ называется множество, состоящее из четырех точек общего положения X, Y, Z, W и шести прямых, попарно их соединяющих. Точки X, Y, Z, W называются *вершинами*, определяемые ими прямые - *сторонами*, при этом XY и ZW, YZ и XW, XZ и YW - пары противоположных сторон. Точки пересечения противоположных сторон $A = XY \cap ZW$, $B = XW \cap YZ$, $S = XZ \cap YW$ называются *диагональными точками.* Прямые AB, AS, BS, попарно соединяющие диагональные точки, называются *диагоналями.*

Теорема. *(О свойствах четырехвершинника).* **Во всяком четырехвершиннике** (рис. 18):

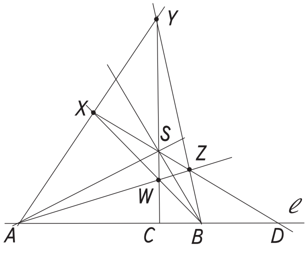

Рис. 18.

1) на любой диагонали располагается гармоническая четверка точек, состоящая из двух диагональных точек и двух точек пересечения этой диагонали с двумя противоположными сторонами, проходящими через третью диагональную точку (например, A, B, C, D, где $D = AB \cap XZ$);

2) **на каждой стороне располагается гармоническая четверка точек, состоящая из двух вершин, диагональной точки и точки пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки** (например X,

Z, S, D);

3) **через каждую диагональную точку проходит гармоническая четверка прямых, состоящая из двух диагоналей и двух противоположных сторон**(например, SA, SB, YW, XZ).

Доказательство. Рассмотрим точки A, B, C, D, лежащие на диагонали AB. Спроектируем прямую AD на прямую XD из точки Y. Тогда $A \to X$, $B \to Z$, $C \to S$, $D \to D$. Рассмотрим двойные отношения (AB, CD) и (XZ, SD). По теореме 7 (гл. 2, §1) каждое из них равно двойному отношению прямых YA, YB, YC, YD. Поэтому

$$(AB, CD) = (XZ, SD). \tag{2.3.1}$$

Спроектируем теперь прямую XD на прямую AD из центра W. Тогда $X \to B$, $Z \to A$, $S \to C$, $D \to D$, при этом снова

$$(XZ, SD) = (BA, CD). \tag{2.3.2}$$

Из соотношений (2.3.1) и (2.3.2) имеем

$$(AB, CD) = (BA, CD). \tag{2.3.3}$$

Но по свойству двойного отношения

$$(BA, CD) = \frac{1}{(AB, CD)}. \tag{2.3.4}$$

Из равенств (2.3.3) и (2.3.4) получаем $(AB, CD)^2 = 1$ и тогда $(AB, CD) = +1$ или $(AB, CD) = -1$. Пусть $(AB, CD) = +1$. Тогда отношение $(d_1 : d_2)$ координат точки D относительно репера $R = \{A, B, C\}$ равно 1 (см. 2.1.2); отсюда $d_1 = d_2$ и $D(1, 1)$, т. е. совпадает с точкой C, а этого не может быть так как точки C и D различные. Предположение неверно и $(AB, CD) = -1$. Свойство 1 доказано.

Из равенства (2.3.1) получаем $(XZ, SD) = -1$ - свойство 2. Так как (SA, SB, SC, SD)=(AB, CD),то (SA, SB, SC, SD) = -1 – свойство 3. ■

Задача. *Построение четвертой гармонической точки (способ 2).*

Дано: $A \in \ell$, $B \in \ell$, $C \in \ell$.

Построить: D - четвертую гармоническую к данным точкам.

Решение.*Построение.* Строим (рис. 19):
1) m, n через A (произвольно);
2) p через точку C (произвольно);
3) $Y = p \cap m$, $W = p \cap n$;
4) $X = BW \cap m$, $Z = BY \cap n$
5) $XZ \cap AB = D$ - искомая четвертая гармоническая точка.

Доказательство. Рассмотрим четырехвершинник $XYZW$. По построению A, B - диагональные точки; C, D - точки пересечения сторон YW и XZ с этой диагональю. По свойству 1: $(AB, CD) = -1$. □

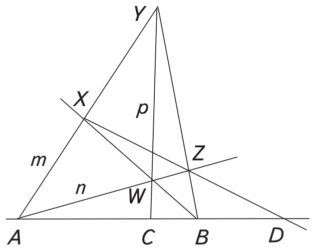

Рис. 19.

Задача всегда имеет решение и притом только одно.

Если $XZ || AB$, то точка D - несобственная. Это произойдет в том случае, когда C - середина отрезка AB (доказать !).

Определение. Фигура, двойственная четырехвершиннику, называется *четырехсторонником.*

Таким образом, четырехсторонник есть множество, состоящее из четырех прямых x, y, z, w общего положения и шести точек их попарного пересечения; x, y, z, w - *стороны,* $x \cap y$ и $z \cap w$, $y \cap z$ и $w \cap x$, $x \cap z$ и $y \cap w$ - пары противоположных *вершин*, а три прямые, соединяющие противоположные вершины, - *диагонали.* Три точки попарного пересечения диагоналей называются *диагональными точками.*

По принципу двойственности справедлива теорема о свойствах четырехсторонника, двойственная теореме о свойствах четырехвершинника. (Сформулировать эту теорему самостоятельно !).

Задача о построении четвертой гармонической прямой также решается по правилу двойственности (выполнить построение!).

2.4 Проективная классификация линий второго порядка

Пусть на проективной плоскости задан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$.

Определение. Линией (кривой) второго порядка называется множество точек $M(x_1, x_2, x_3)$, координаты которых удовлетворяют однородному уравнению второй степени:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \quad (2.4.1)$$

называемому уравнением линии второго порядка.

Уравнение (2.4.1) запишем в сокращенном виде:

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0,$$

где i, j=1, 2, 3 и $a_{ij} = a_{ji}$, т. е. матрица (a_{ij}) - симметричная. Выражение

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$$

представляет собой квадратичную форму.

Замечание. Если у точки M линии второго порядка заменить тройку координат (x_1, x_2, x_3) на другую тройку координат (x_1', x_2', x_3'), то, так как эта тройка пропорциональна первой, она снова будет удовлетворять уравнению (2.4.1). Коэффициенты a_{ij} определены с точностью до ненулевого множителя. Их всего 6, поэтому для их нахождения достаточно пяти уравнений, которые составим, если будем знать пять различных точек линии. Таким образом, линия второго порядка вполне определяется заданием пяти точек.

Теорема. *(О проективной классификации линий второго порядка).* **На проективной плоскости существует пять и только пять классов линий второго порядка. Каждый класс характеризуется одним и только одним из следующих канонических уравнений:**

$$1) {X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2 = 0;$$
$$2) {X_1}^2 + {X_2}^2 - {X_3}^2 = 0;$$
$$3) {X_1}^2 + {X_2}^2 = 0;$$
$$4) {X_1}^2 - {X_2}^2 = 0;$$
$$5) {X_1}^2 = 0.$$

Линии второго порядка, определяемые этими уравнениями, называются:

1) *мнимая овальная линия второго порядка*;
2) *овальная линия второго порядка*;
3) *пара мнимых пересекающихся прямых*;
4) *пара пересекающихся прямых*;
5) *пара совпавших прямых.*

1, 2 - невырожденные линии второго порядка; 3, 4, 5 - вырожденные линии второго порядка.

Доказательство. Как известно, всякая квадратичная форма с помощью линейного невырожденного преобразования переменных может быть приведена к одному и только одному нормальному виду. Левые части уравнений 1-5 и являются нормальными видами квадратичной формы $F(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Переход от переменных x_1, x_2, x_3 к переменным X_1, X_2, X_3, является невырожденным линейным преобразованием и, следовательно, определяется формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + c_{13}X_3, \\ x_2 &= c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + c_{23}X_3, \\ x_3 &= c_{31}X_1 + c_{32}X_2 + c_{33}X_3, \end{aligned}$$

$|(c_{ij})| \neq 0$.

На проективной плоскости геометрический смысл этих формул состоит в том, что они выражают переход от одних проективных координат (x_1, x_2, x_3) к другим проективным координатам (X_1, X_2, X_3). Итак, уравнения 1-5 получаются из уравнения (2.4.1) путем перехода к новой проективной системе координат.

Если уравнения двух линий второго порядка приводятся к одному и тому же нормальному виду, то эти линии относятся к одному классу. Отсюда и получается пять классов линий второго порядка. ■

Заметим, что:
1) если две линии второго порядка принадлежат одному и тому же классу, то они проективно-эквивалентны;
2) две линии второго порядка, принадлежащие различным классам, не проективно-эквивалентны.

2.5 Взаимное расположение линии второго порядка и прямой на проективной плоскости

Пусть на проективной плоскости имеется линия второго порядка γ, определяемая уравнением:

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = 0, \ i,j = 1,2,3 \text{ (здесь и далее)} \tag{2.5.1}$$

и пусть ℓ – некоторая прямая, проходящая через точки $A(a_1,\, a_2,\, a_3)$, $B(b_1,\, b_2,\, b_3)$. Параметрические уравнения прямой ℓ имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1, \\ x_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2, \\ x_3 &= \alpha a_3 + \beta b_3, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

где (x_1, x_2, x_3) - координаты любой точки $M \in \ell$. Сокращенно запишем уравнения (2.5.2):

$$x_i = \alpha a_i + \beta b_i. \tag{2.5.3}$$

Вопрос о взаимном расположении линии γ и прямой ℓ сводится к решению системы, составленной из уравнений (2.5.1) и (2.5.3). Подставим равенства (2.5.3) в уравнение (2.5.1). Получим:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(\alpha a_i + \beta b_i)(\alpha a_j + \beta b_j) = 0$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$\alpha^2 \sum_{i,j} a_{ij}a_i a_j + \alpha\beta\Big(\sum_{i,j} a_{ij}a_i b_j + \sum_{i,j} a_{ij}b_i a_j\Big) + \beta^2 \sum_{i,j} a_{ij}b_i b_j = 0.$$

Рассмотрим $\sum a_{ij}b_i a_j$. В этой сумме поменяем местами индексы i и j:

$$\sum_{i,j} a_{ij}b_i a_j = \sum_{i,j} a_{ji}b_j a_i = \sum_{i,j} a_{ji}a_i b_j.$$

Так как матрица (a_{ij}) симметричная $(a_{ij} = a_{ji})$, то

$$\sum_{i,j} a_{ji}a_i b_j = \sum_{i,j} a_{ij}a_i b_j.$$

Таким образом,

$$\sum_{i,j} a_{ij}a_i b_j = \sum_{i,j} a_{ij} b_i a_j,$$

и полученное уравнение примет вид:

$$\alpha^2 \sum_{i,j} a_{ij}a_i a_j + 2\alpha\beta \sum_{i,j} a_{ij}a_i b_j + \beta^2 \sum_{i,j} a_{ij} b_i b_j = 0. \tag{2.5.4}$$

Введем обозначения:

$$P = \sum_{i,j} a_{ij}a_i a_j,\ Q = \sum_{i,j} a_{ij}a_i b_j,\ R = \sum_{i,j} a_{ij} b_i b_j. \tag{2.5.5}$$

Тогда уравнение (2.5.4) запишется в виде:

$$P\alpha^2 + 2Q\alpha\beta + R\beta^2 = 0 \tag{2.5.6}$$

Один из параметров α, β отличен от нуля. Пусть $\beta \neq 0$. Разделим обе части уравнения (2.5.6) на β^2. Получим уравнение:

$$P\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^2 + 2Q\frac{\alpha}{\beta} + R = 0. \tag{2.5.7}$$

Оно представляет собой квадратное уравнение относительно отношения $\frac{\alpha}{\beta}$. Таким образом, исследование системы, составленной из уравнений линии γ и прямой ℓ, свелось, к исследованию уравнения (2.5.7). Возможны следующие случаи:

1)$P \neq 0$.

Тогда уравнение (2.5.7) есть уравнение второго порядка, и оно может иметь:

а) $\Big(\dfrac{\alpha}{\beta}\Big)_1$, $\Big(\dfrac{\alpha}{\beta}\Big)_2$ - различные действительные корни;

б) $\Big(\dfrac{\alpha}{\beta}\Big)_1 = \Big(\dfrac{\alpha}{\beta}\Big)_2$ - совпавшие корни;

в) $\Big(\dfrac{\alpha}{\beta}\Big)_1$, $\Big(\dfrac{\alpha}{\beta}\Big)_2$ - мнимые корни.

В случае а) прямая ℓ пересекает линию γ в двух различных точках; в случае б) прямая ℓ касается линии γ; в случае в) прямая ℓ не пересекает линию γ.

2) $P = 0$.

Уравнение (2.5.7) имеет вид:

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)Q + R = 0. \tag{2.5.8}$$

Так как $P = 0$ и $P = \sum a_{ij}a_ia_j$ (2.5.5), то $\sum a_{ij}a_ia_j = 0$ – координаты точки A удовлетворяют уравнению (2.5.1) линии γ, и поэтому $A \in \gamma$. Далее, если в уравнении (2.5.8):

а) $Q \neq 0$, то $\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{R}{2Q}$. Имеем еще одну точку пересечения прямой ℓ с линией γ.

б) $Q = 0$, $R = 0$, то уравнение (2.5.8) имеет бесконечное множество решений. В таком случае прямая $\ell \subset \gamma$.

в) $Q = 0$, $R \neq 0$, то уравнение (2.5.8) не имеет решения. В этом случае прямая ℓ не имеет других, кроме точки A, точек пересечения с линией γ.

2.6 Касательная к линии второго порядка на проективной плоскости

Определение. Касательной к линии второго порядка в точке A называется предельное положение секущей AM при стремлении точки M к точке A вдоль линии.

Теорема. **Если овальная линия второго порядка γ на проективной плоскости задана уравнением**

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0, \tag{2.6.1}$$

то касательная к линии γ в ее точке A (a_1,a_2,a_3) существует и имеет уравнение

$$\sum_{i,j} a_{ij}a_ix_j = 0 \tag{2.6.2}$$

Доказательство. Пусть ℓ - некоторая прямая, проходящая через точку A и $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ — другая точка этой прямой. Параметрические уравнения прямой ℓ имеют вид:

$x_1 = \alpha a_1 + \beta b_1,\ \ x_2 = \alpha a_2 + \beta b_2,\ \ x_3 = \alpha a_3 + \beta b_3,$
или в сокращенном виде

$$x_i = \alpha a_i + \beta b_i. \tag{2.6.3}$$

Найдем точку пересечения прямой ℓ с линией γ. Для этого подставим равенства (2.6.3) в уравнение (2.6.1). Получим

$$\sum_{i,j} a_{ij}(\alpha a_i + \beta b_i)(\alpha a_j + \beta b_j) = 0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены. Тогда это уравнение примет вид:

$$\alpha^2 \sum_{i,j} a_{ij} a_i a_j + \alpha\beta(\sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j + \sum_{i,j} a_{ij} b_i a_j) + \beta^2 \sum_{i,j} a_{ij} b_i b_j = 0.$$

В сумме $\sum a_{ij} b_i a_j$ переобозначим индексы i и j, что не повлияет на результат:

$$\sum_{i,j} a_{ij} b_i a_j = \sum_{i,j} a_{ji} b_j a_i = \sum_{i,j} a_{ji} a_i b_j.$$

Так как матрица (a_{ij}) симметричная $(a_{ij} = a_{ji})$, то $\sum a_{ji} a_i b_j = \sum a_{ij} a_i b_j$. Таким образом,

$$\sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j = \sum_{i,j} a_{ij} b_i a_j.$$

Уравнение примет вид:

$$\alpha^2 \sum_{i,j} a_{ij} a_i a_j + 2\alpha\beta \sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j + \beta^2 \sum_{i,j} a_{ij} b_i b_j = 0. \tag{2.6.4}$$

Так как точка $A \in \gamma$, то $\sum a_{ij} a_i a_j = 0$. Получаем уравнение:

$$\beta(2\alpha \sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j + \beta \sum_{i,j} a_{ij} b_i b_j) = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\frac{\beta}{\alpha}\Big(2 \sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i,j} a_{ij} b_i b_j\Big) = 0. \tag{2.6.5}$$

Потребуем, чтобы прямая ℓ была касательной к линии γ. При $(\frac{\beta}{\alpha})_1 = 0$ имеем один корень уравнения (2.6.5). Подставим это значение в уравнение (2.6.3). Получим координаты общей точки прямой ℓ и линии γ: $x_1 = \alpha a_1,\ x_2 = \alpha a_2,\ x_3 = \alpha a_3$. Так как $x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3$, то этой точкой является точка A. Чтобы прямая ℓ касалась линии γ, надо чтобы и второй корень уравнения (2.6.5) был равен 0:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2 = -\frac{2\sum\limits_{i,j} a_{ij}a_ib_j}{\sum\limits_{i,j} a_{ij}b_ib_j} = 0.$$

Откуда получим $\sum\limits_{i,j} a_{ij}a_ib_j = 0$. Теперь найдем

$$\sum_{i,j} a_{ij}a_ix_j = \sum_{i,j} a_{ij}a_i(\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha\sum_{i,j} a_{ij}a_ia_j + \beta\sum_{i,j} a_{ij}a_ib_j$$

$=0$. Таким образом, координаты любой точки M касательной ℓ удовлетворяют уравнению: $\sum a_{ij}a_ix_j = 0$. Значит, это и есть уравнение касательной ℓ. ■

Пример. Составить уравнение касательной к линии: $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3 = 0$ в точке (1,-1,1).

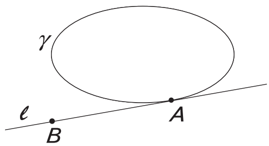

Рис. 20.

Решение. Уравнение касательной в произвольной точке $A(a_1,\, a_2,\, a_3)$ имеет вид

$a_1x_1 + a_2x_2 - 2a_1x_2 - 2a_2x_1 + 3a_2x_3 + 3a_3x_2 = 0$.

Подставим в уравнение координаты данной точки. Получим уравнение

$$x_1 - x_2 - 2x_2 + 2x_1 - 3x_3 + 3x_2 = 0$$

и, окончательно,

$$x_1 - x_3 = 0.$$

Определение. Точка A называется *внешней точкой линии второго порядка*, если из нее можно провести касательные к линии, и — *внутренней*, если касательных не существует.

2.7 Полюсы и поляры линии второго порядка на проективной плоскости. Полярное соответствие

1. Сопряженные точки относительно линии второго порядка.

Определение. Точка B называется *сопряженной с точкой* A относительно линии второго порядка γ, если точка B есть четвертая гармоническая к точке A и двум точкам M_1, M_2 пересечения линии γ с секущей ℓ, проведенной через точку A.

Заметим, что точка A имеет бесконечное множество сопряженных с ней точек B. Рассмотрим некоторые свойства сопряженных точек.

1° *Условие сопряженности.*

Теорема. **Пусть линия второго порядка γ задана уравнением:**

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0 \tag{2.7.1}$$

относительно проективного репера $R = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ E\}$ и пусть $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ - некоторая точка плоскости, не лежащая на линии γ. Точка $B(b_1, b_2, b_3)$ сопряжена с точкой $A(a_1, a_2, a_3)$ относительно линии γ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i,j} a_{ij}a_ib_j = 0. \tag{2.7.2}$$

Доказательство. Уравнение прямой AB запишем в виде:

$$x_i = \alpha a_i + \beta b_i. \tag{2.7.3}$$

Найдем точки пересечения прямой AB с линией γ, для чего подставим равенства (2.7.3) в уравнение (2.7.1). После упрощения получим:

$$\alpha^2\sum_{i,j} a_{ij}a_ia_j + 2\alpha\beta\sum_{i,j} a_{ij}a_ib_j + \beta^2\sum_{i,j} a_{ij}b_ib_j = 0.$$

Так как точка $A \notin \gamma$, то $\beta \neq 0$. Разделим обе части уравнения на β^2:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\sum_{i,j} a_{ij}a_ia_j + 2\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i,j} a_{ij}a_ib_j + \sum_{i,j} a_{ij}b_ib_j = 0. \tag{2.7.4}$$

Квадратное уравнение (2.7.4) имеет два различных действительных корня $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ и $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, соответствующих точкам M_1 и M_2 пересечения прямой AB с линией γ. При этом координаты точек M_1, M_2 равны соответственно $\alpha_1 a_i + \beta_1 b_i$ и $\alpha_2 a_i + \beta_2 b_i$. Так как точки M_1, M_2, A, B образуют гармоническую четверку точек (по определению сопряженных точек), то двойное отношение $(M_1 M_2, AB) = -1$. Воспользовавшись тем, что $(M_1 M_2, AB) = (AB, M_1 M_2)$ и определением двойного отношения, получим

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -1.$$

Тогда

$$\frac{\beta_1 \alpha_2}{\beta_2 \alpha_1} = -1.$$

Отсюда получим $\beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 = 0$ и, наконец, разделив обе части равенства на произведение $\beta_1 \beta_2$, найдем

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 0,$$

т. е. сумма корней квадратного уравнения (2.7.4) равна 0. По теореме Виета коэффициент

$$Q = \sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j = 0.$$

Верно и обратное: если координаты точек A и B удовлетворяют равенству (2.7.2), то они сопряжены относительно линии второго порядка γ. ■

2°. *Симметричность.*

Если точка B сопряжена с точкой A относительно линии второго порядка γ, то и точка A сопряжена с точкой B относительно линии γ.

Доказательство. Пусть точка B сопряжена с точкой A. Тогда выполняется равенство

$$\sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j = 0.$$

Так как матрица (a_{ij}) симметричная $(a_{ij} = a_{ji})$, то

$$\sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j = \sum_{i,j} a_{ji} a_i b_j. \tag{2.7.5}$$

Поменяв местами индексы i и j, получим

$$\sum_{i,j} a_{ji}a_i b_j = \sum_{i,j} a_{ij}a_j b_i$$

или

$$\sum_{i,j} a_{ji}a_i b_j = \sum_{i,j} a_{ij}b_i a_j. \qquad (2.7.6)$$

Из равенств (2.7.2), (2.7.5) и (2.7.6) следует

$$\sum_{i,j} a_{ij}b_i a_j = 0,$$

и, значит, точка A сопряжена с точкой B относительно линии γ. ■

3°. *Рефлексивность.*

Доказательство. До сих пор мы рассматривали точки A, не принадлежащие линии второго порядка γ. Если $A \in \gamma$, то

$$\sum_{i,j} a_{ij}a_i a_j = 0.$$

Это равенство есть частный случай условия сопряженности (2.7.2) при $b_j = a_j$, т. е. когда точка A совпадает с точкой B. Можно сказать, что точка A сопряжена сама с собой. ■ Таким образом, **точка A сопряжена сама с собой тогда и только тогда, когда** $A \in \gamma$.

4°. *Транзитивность.*

Если каждая из точек B и C сопряжена с точкой A относительно линии второго порядка γ, то любая точка прямой BC сопряжена с точкой A относительно линии γ.

Доказательство. Пусть точки B, C и A имеют соответственно координаты (b_i), (c_i), (a_i) и пусть точка $M(x_i)$ - любая точка прямой BC. Тогда $x_i = \alpha b_i + \beta c_i$. Найдем

$$\sum_{i,j} a_{ij}a_i x_j = \sum_{i,j} a_{ij}a_i(\alpha b_j + \beta c_j) =$$

$$\alpha \sum_{i,j} a_{ij}a_i b_j + \beta \sum_{i,j} a_{ij}a_i c_j.$$

Так как точки B и C сопряжены с точкой A, то

$$\sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j = 0 \quad \sum_{i,j} a_{ij} a_i c_j = 0$$

и тогда получим

$$\sum_{i,j} a_{ij} a_i x_j = 0,$$

т. е. точка M сопряжена с точкой A. $\blacksquare$.

2. *Поляра линии второго порядка. Различные способы построения поляры.*

Определение. Пусть имеется линия второго порядка γ и точка A. Множество всех точек M, сопряженных с точкой A относительно линии γ, называется *полярой* точки A относительно линии γ.

Теорема 1. **Если линия второго порядка γ задана уравнением $\sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0$ и точка A имеет координаты (a_1, a_2, a_3), то поляра точки A есть прямая с уравнением**

$$\sum_{i,j} a_{ij} a_i x_j = 0. \tag{2.7.7}$$

Доказательство. Пусть ℓ - поляра точки A относительно линии γ. Если $M(x_1, x_2, x_3) \in \ell$, то по определению поляры точка M сопряжена с точкой A. Условие сопряженности точек A и M имеет вид (2.7.7):

$$\sum_{i,j} a_{ij} a_i x_j = 0.$$

Если точка M не принадлежит поляре, то уравнение (2.7.7) не имеет места. Таким образом, поляра ℓ определяется уравнением (2.7.7). Но это есть уравнение первой степени относительно x_1, x_2, x_3. Значит, поляра есть прямая. $\blacksquare$

Следствие. **Если точка A принадлежит линии второго порядка γ, то ее полярой является касательная к линии γ в точке A.**

Действительно, уравнение касательной к линии γ в точке $A \in \gamma$ имеет в точности вид (2.7.7) (гл.II §6). Поэтому естественно принять эту касательную за поляру точки A.

Задача *(I способ построения поляры).*
Дано: γ - линия второго порядка, точка A, $A \notin \gamma$.
Построить: поляру точки A относительно γ.

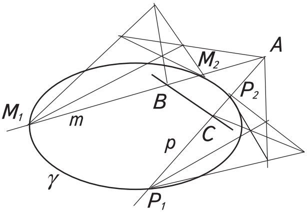

Рис. 21.

Решение. *Построение*. Строим (рис. 21):
1) m через A произвольно,
2) $\{M_1, M_2\} = m \cap \gamma$,
3) $B : (M_1M_2, AB) = -1$,
4) p через A произвольно,
5) $\{P_1, P_2\} = p \cap \gamma$,
6) $C : (P_1P_2, AC) = -1$,
7) $BC = \ell$ - поляра.

Доказательство. По построению точки B и C сопряжены с точкой A. Тогда по свойству транзитивности каждая точка прямой BC сопряжена с точкой A и по теореме 1 прямая BC является полярой точки A. $\square$

Теорема 2. *(О взаимности).* **Пусть дана линия второго порядка γ и пусть даны точка A и ее поляра a, точка B и ее поляра b. Тогда, если $A \in b$, то и $B \in a$.**

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$$

уравнение линии γ и точки A, B имеют координаты $A(a_i)$, $B(b_i)$. Тогда

$$\sum_{i,j} a_{ij}a_ix_j = 0, \ \sum_{i,j} a_{ij}b_ix_j = 0 -$$

соответственно уравнения поляр a и b. Так как $A \in b$, то координаты точки A удовлетворяют уравнению поляры b:

$$\sum_{i,j} a_{ij}b_ia_j = 0.$$

В силу симметричности матрицы (a_{ij})

$$\sum_{i,j} a_{ij}b_ia_j = \sum_{i,j} a_{ij}a_ib_j$$

(см.гл.II §5 §6). Получаем, что

$$\sum_{i,j} a_{ij} a_i b_j = 0,$$

а это есть условие принадлежности точки B поляре a. ■

Теорема 3. **Если из точки A, лежащей вне линии второго порядка γ, проведены касательные AT_1 и AT_2 к линии γ, то прямая T_1T_2, соединяющая точки касания T_1 и T_2, является полярой точки A относительно линии γ.**

Доказательство. Действительно, касательная AT_1 к линии γ в точке T_1 является полярой точки касания T_1 (следствие к теореме 1). Из $A \in AT_1$ следует, что $T_1 \in a$, a - поляра точки A (теорема о взаимности). Аналогично рассуждая, получим $T_2 \in a$. Следовательно, $a = T_1T_2$. ■

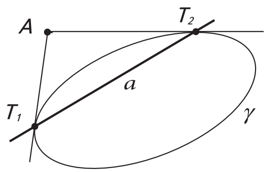

Рис. 22.

Теорема $3'$.*(Обратная к теореме 3)* **Если A - внешняя точка линии второго порядка γ и a - ее поляра, пересекающая γ в точках T_1 и T_2, то прямые AT_1 и AT_2 - касательные к линии γ.**

Доказательство. Пусть t_1 - касательная к линии γ в точке T_1, t_2 - касательная в точке T_2. Так как $T_1 \in a$, то по теореме 2 $A \in t_1$, аналогично получим $A \in t_2$, т. е. $AT_1 = t_1$, $AT_2 = t_2$ - касательные. ■

Задача. *(II способ построения поляры).*

Дано: γ - линия второго порядка, A - внешняя точка.

Построить: a - поляра точки A.

Решение.*Построение.* Строим:

1) AT_1, AT_2 - касательные к линии γ,

2) $T_1T_2 = a$ - искомая поляра (по теореме 3).

Теорема 4. **Пусть γ - линия второго порядка, и $A \notin \gamma$ - какая-то точка плоскости. Через точку A проведены секущие XW и YZ, пересекающие линию γ в точках X, Z, Y, W. Тогда диагональ BC четырехвершинника $XYZW$, проходящая через две другие диагональные точки $B = XZ \cap YW$, $C = XY \cap ZW$, есть поляра точки A относительно линии γ**

Доказательство. Найдем $P = XW \cap BC$, $Q = YZ \cap BC$ (рис. 23). Для четырехвершинника $XYZW$ прямая XW является стороной; точка A - диагональная точка, принадлежащая этой стороне, и точка P - точка пересечения XW с диагональю BC, проходящей через другие две диагональные точки. По свойству 2° четырехвершинника четверка точек X, W, A, P гармоническая. Поэтому точка P сопряжена с точкой A относительно линии γ и, значит $P \in a$, a - поляра точки A. Аналогично получаем, что $Q \in a$. Таким образом, $a = PQ = BC$. ■

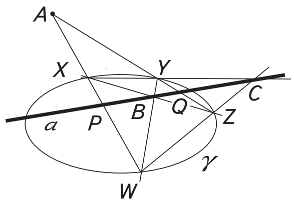

Рис. 23.

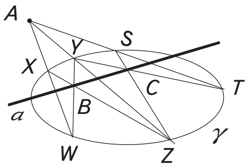

Рис. 24.

Задача.*(III способ построения поляры).*

Дано: γ - линия второго порядка, $A \notin \gamma$.

Построить: поляру точки A относительно линии γ.

Решение. *Построение.* Строим (рис. 23):

1) секущие XW, YZ через точку A произвольно,
2) $B = XZ \cap YW$, $C = XY \cap WZ$,
3) $BC = a$ - поляра (теорема 4).

Задача*(IV способ построения поляры).*

Дано: γ - линия второго порядка,$A \notin \gamma$.

Построить: поляру точки A относительно линии γ.

Решение.*Построение.* Строим (рис. 24):

1) секущие XW, YZ, ST - через точку A произвольно
2) $B = XZ \cap YW$, $C = YT \cap SZ$
3) $BC = a$ - поляра.

Доказательство. Рассмотрим четырехвершинник $XYZW$. По теореме 4 его диагональная точка $B \in a$, a - поляра точки A. Аналогично, диагональная точка C четырехвершинника $YSTZ$ также принадлежит поляре a точки A. Следовательно, $BC = a$, т.е. BC - поляра точки A. □

Замечание. На всех рассмотренных чертежах, где $A \notin \gamma$, в качестве точки A взята внешняя точка. Если A - внутренняя точка линии второго порядка γ, то построение аналогичное (исключить способ II).

3. Полярное соответствие.

Определение. Пусть a поляра точки A относительно линии второго порядка γ. Тогда точка A называется *полюсом* прямой a.

Задача.*(Построение полюса).*

Дано: γ - линия второго порядка, a - некоторая прямая.

Построить: A - полюс прямой a.

Решение. *Построение.* Строим (рис. 25):

1) $B \in a$, $C \in a$ - произвольно,
2) b - поляра точки B,
3) c - поляра точки C,
4) $A = b \cap c$ - полюс.

Доказательство. По теореме о взаимности, поляра b точки $B \in a$ должна пройти через полюс прямой a. Аналогично, поляра c точки C проходит через полюс прямой a. Значит, $A = b \cap c$ и есть полюс прямой a. □

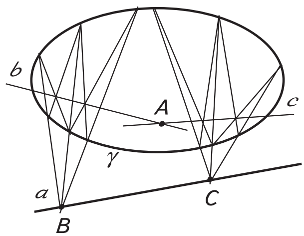

Рис. 25.

Определение. Соответствие, которое каждой точке проективной плоскости ставит в соответствие ее поляру относительно данной линии второго порядка и каждой прямой ставит в соответствие ее полюс относительно этой линии, называется *полярным соответствием (поляритетом).*

Свойства полярного соответствия.

1°. Свойство взаимности (теорема о взаимности).

2°. Квадрат поляритета есть тождественное преобразование.

3°. Поляритет относительно линии второго порядка γ с уравнением $\sum\limits_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$ вполне определяется формулами:

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$u_1 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

где (x_1, x_2, x_3) - координаты точки, а (u_1, u_2, u_3) - координаты ее поляры.

2.8 Конструктивные теоремы теории линий второго порядка

1. *Геометрическое определение линии второго порядка.*

Теорема Штейнера. **Пусть имеются два пучка прямых $\Pi(L)$ и $\Pi(L^{'})$, между которыми задано проективное соответствие, не являющееся перспективным. Тогда множество точек пересечения соответствующих прямых этих пучков есть линия второго порядка, причем центры L, $L^{'}$ принадлежат этой линии.**

Доказательство см. в книге [5], стр. 66-69.

Следствие. Если соответствие между пучками $\Pi(L)$ и $\Pi(L^{'})$ является перспективным, то линия второго порядка вырождается в пару прямых: ось и прямую $LL^{'}$, соединяющую центры.

Теорема *(обратная)*.**Пусть γ - линия второго порядка и L, $L^{'}$ - любые две ее точки. Тогда, если точка $M \in \gamma$, то соответствие между пучками прямых $\mathbf{\Pi}(L)$ и $\mathbf{\Pi}(L^{'})$, которое прямой LM ставит в соответствие прямую $L^{'}M$, является проективным соответствием.**

Доказательство см. там же, [5].

Следствие. Овальная линия второго порядка вполне определяется пятью точками общего положения.

Определение. Линией второго порядка называется множество всех точек пересечения соответственных прямых двух проективных пучков.

2. Теорема Паскаля и ее частные случаи.

Определение. Множество, состоящее из шести точек A_i, $i = 1$, 2, 3, 4, 5, 6, называемых *вершинами*, и шести различных прямых A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1, называемых *сторонами*, называется *шестивершинником (шестиугольником)*.

Определение. Шестивершинник называется *вписанным* в линию второго порядка, если все его вершины принадлежат линии.

Теорема Паскаля. **Если шестивершинник (шестиуголь-**

ник) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ **вписан в линию второго порядка** γ**, то точки пересечения** $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $R = A_3A_4 \cap A_6A_1$ **его противоположных сторон принадлежат одной прямой -*прямой Паскаля.***

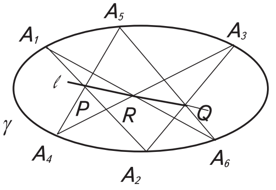

Рис. 26.

Доказательство. Введем на плоскости проективную систему координат, приняв точки A_1, A_2, A_3 за базисные точки и точку A_4 за единичную точку. Тогда будем иметь: $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0{,}0,1)$, $A_4(1,1,1)$ и пусть $A_5(a,b,c)$, $A_6(a',b',c')$. Запишем уравнение линии γ в виде:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \quad (2.8.1)$$

Из условия $A_1 \in \gamma$ найдем $a_{11} = 0$. Аналогично получим: $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$. Уравнение (2.8.1) примет вид :

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0$$

и так как $A_4 \in \gamma$, $A_5 \in \gamma$, $A_6 \in \gamma$, то

$$\begin{cases} a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0, \\ a_{12}ab + a_{13}ac + a_{23}bc = 0, \\ a_{12}a^{'}b^{'} + a_{13}a^{'}c^{'} + a_{23}b^{'}c^{'} = 0. \end{cases} \quad (2.8.2)$$

Таким образом, коэффициенты a_{12}, a_{13},a_{23} находятся из системы уравнений (2.8.2), которая представляет собой однородную систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Так как эта система уравнений имеет ненулевое решение, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ab & ac & bc \\ a'b^{'} & a'c' & b^{'}c' \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8.3)$$

Вычислив определитель, получим равенство

$$aa'(bc' - cb^{'}) - bb^{'}(ac' - ca') + cc'(ab^{'} - ba') = 0, \quad (2.8.4)$$

которое связывает координаты точек A_5, A_6.

Теперь найдем координаты точек P, R, Q и покажем, что они лежат на одной прямой. Для этого сначала составим уравнения всех сторон шестивершинника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

$A_1A_2: \quad x_3 = 0,$

$A_2A_3: \quad x_1 = 0,$

$$A_3A_4: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad x_1 - x_2 = 0,$$

$$A_4A_5: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

или $(c-b)x_1 - (c-a)x_2 + (b-a)x_3 = 0,$

$$A_5A_6: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

или $(bc' - cb')x_1 - (ac' - ca')x_2 + (ab' - ba')x_3 = 0,$

$$A_6A_1: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a' & b' & c' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad cx_2 - b'x_3 = 0.$$

Теперь находим координаты точки $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$. Они являются одним из решений системы, составленной из уравнений прямых A_1A_2 и A_4A_5:

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ (c-b)x_1 - (c-a)x_2 + (b-a)x_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $P(c-a, c-b, 0)$.

Аналогично, для нахождения координат точки $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6$ составим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ (bc' - cb')x_1 - (ac' - ca')x_2 + (ab' - ba')x_3 = 0 \end{cases}$$

и найдем одно из ее решений. Тогда $Q(0, ab' - ba', ac' - ca')$. И, наконец, найдем координаты точки $R = A_3A_4 \cap A_6A_1$ из системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ c'x_2 - b'x_3 = 0. \end{cases}$$

Так, положим $x_2 = b^{'}$, $x_3 = c'$. Тогда $R(b^{'}, b^{'}, c')$.

Проверим, что точки P, Q, R лежат на одной прямой. Вычислим определитель, составленный из координат точек P, Q, R:

$$\Delta^{'} = \begin{vmatrix} c-a & c-b & 0 \\ 0 & ab^{'} - ba' & ac' - ca' \\ b^{'} & b^{'} & c' \end{vmatrix} =$$

$$= (c-a)(ab^{'} - ba')c' + (c-b)(ac' - ca')b^{'} - (c-a)(ac' - ca')b^{'} =$$
$$(ab^{'} - ba')(cc' - ac') + (ac' - ca')(cb^{'} - bb^{'}) - (ac' - ca')(cb^{'} - ab^{'}) =$$
$$(ab^{'} - ba')cc' - ac'(ab^{'} - ba') + (ac' - ca')(ab^{'} - bb^{'}) =$$
$$(ab^{'} - ba')cc' - ac'ab^{'} + ac'ba' + ac'ab^{'} - ca'ab' - (ac' - ca')bb^{'} =$$
$$(ab^{'} - ba')cc' - (ac' - ca')bb^{'} + (bc' - cb^{'})aa'.$$

Полученное выражение представляет собой левую часть уравнения (2.8.4) и, следовательно, $\Delta^{'} = 0$. В таком случае точки P, Q, R лежат на одной прямой. ■

Обратная теорема Паскаля. **Если в шестивершиннике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ точки пересечения противоположных сторон $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $R = A_3A_4 \cap A_6A_1$ лежат на одной прямой, то вершины шестивершинника принадлежат линии второго порядка.**

Доказательство. Это утверждение следует из того, что, если определитель $\Delta^{'} = 0$ (условие принадлежности точек P, Q, R одной прямой), то и $\Delta = 0$ (условие принадлежности вершин шестиугольника одной линии второго порядка γ.) ■

Частные (предельные) случаи теоремы Паскаля.

Теорему Паскаля можно применить к пятивершиннику (пятиугольнику), к четырехвершиннику (четырехугольнику) и трехвершиннику (треугольнику), принимая соответственно одну, две и три вершины за двойные точки.

Предположим, что одна из вершин шестивершинника, вписанного в линию второго порядка, перемещаясь по линии, стремится к другой вершине, причем обе вершины принадлежат одной стороне. Тогда эта сторона имеет своим пределом касательную к линии второго порядка во второй точке. а шестивершинник превратился в *пятивершинник*, у которого одна вершина двойная и сторона, соединяющая две совпавшие вершины, является касательной к линии второго порядка в этой вершине.

Применяя предельный переход два и три раза мы получим соответственно *четырехвершинник (четырехугольник)* и *трехвершинник (треугольник)*, вписанные в линию второго порядка.

Теорема Паскаля для пятивершинника. **Если пятивершинник вписан в линию второго порядка, то точка пересечения касательной к линии в какой-то вершине с противоположной стороной лежит на прямой, соединяющей точки пересечения двух оставшихся пар несмежных сторон**.

Доказательство. Пусть имеется *пятивершинник* $A_1A_2A_3A_4A_5$, вписанный в линию второго порядка γ. Положим $A_5 = A_6$ и рассмотрим шестивершинник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Применим к

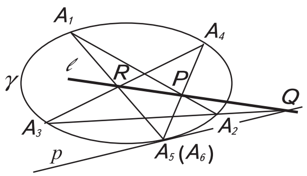

Рис. 27.

нему теорему Паскаля. Тогда точки: $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6 = A_2A_3 \cap p$; (p- касательная к линии γ в точке A_5), $R = A_3A_4 \cap A_6A_1 = A_3A_4 \cap A_5A_1$ лежат на одной прямой ℓ. ■

Теорема Паскаля для четырехвершинника. **Если четырехвершинник вписан в линию второго порядка, то две точки пересечения противоположных сторон и две точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой - прямой Паскаля**.

Доказательство. Пусть имеется четырехвершинник $A_1A_2A_3A_4$, вписанный в линию второго порядка γ. Положим:

а) $A_1 = A_5$, $A_3 = A_6$
и рассмотрим шестивершинник $A_1A_5A_2A_3A_6A_4$. Применим к нему теорему Паскаля. Тогда получим, что точки $P = a_1 \cap a_3$, (a_1 - касательная в точке A_1, a_3 - касательная в точке A_3), $Q = A_1A_2 \cap A_3A_4$, $R = A_2A_3 \cap A_4A_1$ лежат на одной прямой ℓ. Положим теперь:

б) $A_2 = A_5$, $A_4 = A_6$
и рассмотрим шестивершинник $A_1A_2A_5A_3A_4A_6$. Применив к нему теорему Паскаля, получим, что точка $S = a_2 \cap a_4$ (a_2 - касательная в точке A_2, a_4 - касательная в точке A_4) лежит на той же прямой ℓ. ■

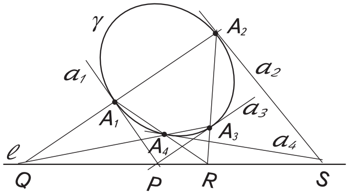

Рис. 28.

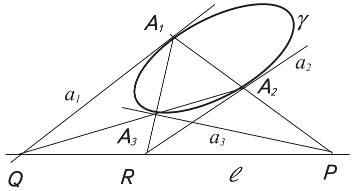

Рис. 29

Теорема Паскаля для трехвершинника. **Если трехвершинник вписан в линию второго порядка, то три точки пересечения каждой стороны с касательной в противолежащей вершине лежат на одной прямой - прямой Паскаля**.

Доказательство аналогичное.

3. *Теорема Брианшона и ее частные случаи.*

Определение. Шестисторонником называется фигура, двойственная шестивершиннику.

Определение. Шестисторонник называется *описанным* около линии второго порядка, если его стороны являются касательными к этой линии.

Теорема Брианшона. **Если шестисторонник описан около линии второго порядка, то три прямые, соединяющие противоположные вершины шестисторонника, пересекаются в одной точке -** ***точке Брианшона.***

Доказательство. Пусть шестисторонник $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ описан около линии второго порядка γ. Рассмотрим поляритет $\mathbf{f}$ относительно линии γ. Тогда $\mathbf{f}(a_i)= A_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ - точки касания, так как полюсом касательной является ее точка касания.

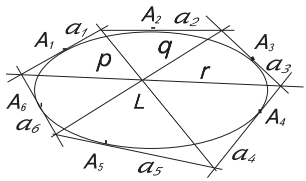

Рис. 30.

Применим к шестивершиннику $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ теорему Паскаля. Тогда точки пересечения $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $R = A_3A_4 \cap A_6A_1$ противоположных сторон шестивершинника лежат на прямой Паскаля ℓ. Так как поляритет обладает свойством взаимности, то точкам P, Q, R соответствуют прямые p, q, r, соединяющие попарно точки пересечения (пары противоположных вершин) $a_1 \cap a_2$ и $a_4 \cap a_5$, $a_2 \cap a_3$ и $a_5 \cap a_6$, $a_3 \cap a_4$ и $a_6 \cap a_1$, и эти прямые проходят через одну точку L - полюс прямой ℓ. ■

Частные (предельные) случаи теоремы Брианшона.

По принципу двойственности справедливы частные (предельные) случаи теоремы Брианшона для пятисторонника, четырехсторонника и трехсторонника, получающиеся из теорем Паскаля для пятивершинника, четырехвершинника и трехвершинника заменой слов, как ранее введенной (гл.I,§8), так и:

"вершина" $\longleftrightarrow$ "сторона
"касательная" $\longleftrightarrow$ "точка касания
"прямая Паскаля" $\longleftrightarrow$ "точка Брианшона".

Теорема Брианшона для пятисторонника. **Если пятисторонник описан около линии второго порядка, то прямая, соединяющая точку касания какой-либо стороны с противолежащей вершиной, проходит через точку пересечения двух прямых, попарно соединяющих оставшиеся вершины.**

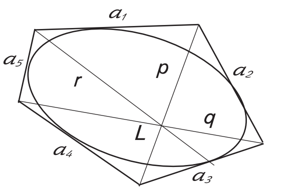

Рис. 31.

Теорема Брианшона для четырехсторонника. **Если четырехсторонник описан около линии второго порядка, то две прямые, попарно соединяющие противоположные вершины, и две прямые, попарно соединяющие точки касания противоположных сторон, пересекаются в точке Брианшона.**

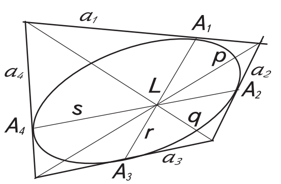

Рис. 32.

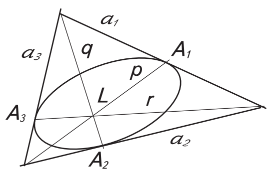

Рис. 33.

Теорема Брианшона для трехсторонника. **Если трехсторонник описан около линии второго порядка, то три прямые, соединяющие каждую вершину с точкой касания**

противоположной стороны, пересекаются в точке Брианшона.

4. *Применение теорем Паскаля и Брианшона к решению задач.*

Задача. Даны пять точек линии второго порядка γ: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Построить какую-либо шестую точку линии γ.

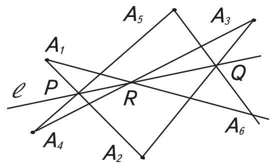

Рис. 34.

Решение.*Построение.* Строим (рис. 34):
1) $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$,
2) ℓ через P произвольно,
3) $A_2A_3 \cap \ell = Q$, $A_3A_4 \cap \ell = R$,
4) $A_6 = QA_5 \cap RA_1$ - искомая.

Доказательство. Рассмотрим шестивершинник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. По построению точки пересечения P, Q R противоположных сторон лежат на прямой ℓ. Тогда по обратной теореме Паскаля точка A_6 принадлежит линии, определяемой данными пятью точками, т.е. линии γ. □

2.9 Геометрия на плоскости с фиксированной прямой

1. *Проективно-аффинное преобразование плоскости.*

Определение. Проективно-аффинным преобразованием проективной плоскости называется проективное преобразование проективной плоскости, которое отображает на себя некоторую фиксированную прямую ℓ.

Теорема 1. **Множество всех проективно-аффинных преобразований проективной плоскости с фиксированной прямой ℓ является группой относительно композиции преобразований**.

Доказательство. Во-первых, если f и g — проективно-аффинные преобразования, отображающие прямую ℓ на себя, то их композиция $g \circ f$ также отображает прямую ℓ на себя, а потому является проективно-аффинным преобразованием. Во-вторых, если f - проективно-аффинное преобразование, то и обратное к нему преобразование f^{-1} является проективно-аффинным преобразованием, так как отображает так же, как и преобразование f, прямую ℓ на себя. Из этих двух условий следует справедливость теоремы. ■

Выведем формулы проективно-аффинного преобразования плоскости.

Пусть f - проективно-аффинное преобразование плоскости, отображающее на себя прямую ℓ. Выберем на плоскости проективный репер $R = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ E\}$ так, чтобы точки A_1 и A_2 лежали на прямой ℓ, а точки A_3 и E не принадлежали прямой ℓ. Преобразование f по определению является проективным, а потому его формулы можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

где $\Delta = |(a_{ij})| \neq 0,\ i,j = 1,\ 2,\ 3.$

Рассмотрим точку $A_1(1,0,0)$. Ее образ A_1' принадлежит прямой ℓ, и поэтому точка $A_1'(x_1', x_2', 0)$. Подставим координаты точек A_1 и A_1' в формулы (2.9.1). Получим из третьего равенства $a_{31} = 0$. Аналогично рассуждая для точек $A_2(0,1,0)$ и образа $A_2'(x_1'', x_2'', 0)$, найдем, что $a_{32} = 0$. Таким образом, формулы (2.9.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= \qquad\qquad\qquad\quad\ \ a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{2.9.2}$$

где $\Delta = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0.$

Верно и обратное утверждение. Если проективное преобразование f задано формулами (2.9.2), то оно является проективно-аффинным преобразованием, отображающим на себя прямую $\ell = A_1A_2$. Итак, доказано, что **формулы (2.9.2) есть формулы проективно-аффинного преобразования.**

Теорема 2. **Группа проективно-аффинных преобразований плоскости с фиксированной прямой ℓ изоморфна группе аффинных преобразований аффинной плоскости.**

Доказательство. В формулах (2.9.2) перейдем от однородных проективных координат к так называемым неоднородным проективным координатам:

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3},\ x' = \frac{x'_1}{x'_3},\ y' = \frac{x'_2}{x'_3}.$$

Для этого разделим первое и второе уравнение на третье почленно:

$$\frac{\rho x'_1}{\rho x'_3} = \frac{a_{11}}{a_{33}}\frac{x_1}{x_3} + \frac{a_{12}}{a_{33}}\frac{x_2}{x_3} + \frac{a_{13}}{a_{33}},$$

$$\frac{\rho x'_2}{\rho x'_3} = \frac{a_{21}}{a_{33}}\frac{x_1}{x_3} + \frac{a_{22}}{a_{33}}\frac{x_2}{x_3} + \frac{a_{23}}{a_{33}}$$

и введем обозначения:

$$a_1 = \frac{a_{11}}{a_{33}},\ b_1 = \frac{a_{12}}{a_{33}},\ c_1 = \frac{a_{13}}{a_{33}},\ a_2 = \frac{a_{21}}{a_{33}},\ b_2 = \frac{a_{22}}{a_{33}},\ c_2 = \frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

Тогда формулы (2.9.2) примут вид:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2, \end{aligned} \tag{2.9.3}$$

где $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Формулы (2.9.3), как известно, вполне определяют в аффинных координатах x, y аффинное преобразование аффинной плоскости. Таким образом, с каждым проективно-аффинным преобразованием сопоставляется некоторое аффинное преобразование. Отсюда и следует изоморфизм. ■

2. *Модель аффинной плоскости на проективной плоскости.*

Пусть $\mathbf{P_2}$ - проективная плоскость и $\boldsymbol{\ell}$ - некоторая фиксированная прямая на ней.

Определение. Аффинной плоскостью $\mathbf{A_2}$ называется множество $\mathbf{P_2} \setminus \boldsymbol{\ell}$, т. е. множество всех точек плоскости $\mathbf{P_2}$, не принадлежащих прямой $\boldsymbol{\ell}$. Прямая $\boldsymbol{\ell}$ называется *абсолютом* аффинной плоскости.

Из определения следует, что *прямой* аффинной плоскости $\mathbf{A_2}$ является любая прямая плоскости $\mathbf{P_2}$ (кроме прямой $\boldsymbol{\ell}$), из которой удалена точка пересечения ее с прямой $\boldsymbol{\ell}$.

Аффинное преобразование плоскости $\mathbf{A_2}$ - это есть проективно-аффинное преобразование плоскости $\mathbf{P_2}$, которое отображает абсолют $\boldsymbol{\ell}$ на себя.

Рассмотрим некоторые аффинные понятия с проективной точки зрения.

Определение. Прямые a, b плоскости $\mathbf{A_2}$ называются *параллельными*, если на плоскости $\mathbf{P_2}$ точка их пересечения $a \cap b$ лежит на прямой $\boldsymbol{\ell}$.

Замечание. Таким образом, абсолют $\boldsymbol{\ell}$ играет роль несобственной прямой, а принадлежащие ей точки - роль несобственных точек.

Теорема 1. **Аффинное преобразование отображает любые две параллельные прямые** a, b **в параллельные прямые** a', b'.

Доказательство. Пусть f - аффинное преобразование плоскости $\mathbf{A_2}$ и $a||b$, $a' = f(a)$, $b' = f(b)$. Так как $a||b$, то на плоскости $\mathbf{P_2}$ прямые a, b пересекаются в какой-то точке $C_{\boldsymbol{\ell}}$, принадлежащей прямой $\boldsymbol{\ell}$. Пусть $f(C_{\boldsymbol{\ell}}) = C'_{\boldsymbol{\ell}}$. Тогда по определению аффинного преобразования точка $C'_{\boldsymbol{\ell}}$ также принадлежит прямой $\boldsymbol{\ell}$. Так как прямые a' и b' пересекаются на плоскости $\mathbf{P_2}$ в точке $C'_{\boldsymbol{\ell}} \in \boldsymbol{\ell}$, то на аффинной плоскости $\mathbf{A_2}$ они параллельны (по определению). ■

На проективной плоскости $\mathbf{P_2}$ с фиксированной прямой $\boldsymbol{\ell}$ любые две точки A, B прямой a делят эту прямую на два подмножества, одно из которых содержит точку пересечения прямой a с прямой $\boldsymbol{\ell}$, а другое нет.

Определение. Отрезком AB на аффинной плоскости $\mathbf{A_2}$ называется то подмножество прямой $AB = a$, которое содержит точку пересечения прямой a с абсолютом $\boldsymbol{\ell}$ на проективной плоскости $\mathbf{P_2}$.

На аффинной плоскости $\mathbf{A_2}$ точки A, B прямой a делят эту прямую на три подмножества, одно из которых - отрезок; два других подмножества называются *лучами*.

Определение. Простым отношением (AB, C) трех точек A, B, C прямой a называется двойное отношение $(AB, CD_{\boldsymbol{\ell}})$, где $D_{\boldsymbol{\ell}} = a \cap \boldsymbol{\ell}$, т. е. $(AB, C) = (AB, CD_{\boldsymbol{\ell}})$.

Определение. Точка C называется *серединой* отрезка AB, если она является четвертой гармонической к точкам A, B, $D_{\boldsymbol{\ell}}$, где $D_{\boldsymbol{\ell}} = a \cap \boldsymbol{\ell}$, $a = AB$.

Теорема *2*.(*Инвариантность простого отношения*).
Аффинное преобразование плоскости $\mathbf{A_2}$ сохраняет простое отношение трех точек.

Доказательство. Пусть f - аффинное преобразование плоскости $\mathbf{A_2}$ и A, B, C - три точки, лежащие на прямой a . Аффинное преобразование f отображает точки A, B, C прямой a в точки A', B', C' прямой $a' = f(a)$. Пусть на плоскости $\mathbf{P_2}$ прямая a пересекает абсолют $\boldsymbol{\ell}$ в точке $D_{\boldsymbol{\ell}}$. Тогда точка $D'_{\boldsymbol{\ell}} = a' \cap \boldsymbol{\ell}$ есть образ точки $D_{\boldsymbol{\ell}}$ в проективно-аффинном преобразовании плоскости $\mathbf{P_2}$, порождающем аффинное преобразование f. По свойствам проективно-аффинного преобразования $(AB, CD_{\boldsymbol{\ell}}) = (A'B', C'D'_{\boldsymbol{\ell}})$. Но тогда на плоскости $\mathbf{A_2}$ равны простые отношения: $(AB, C) = (A'B', C')$. ■

Определение. Овальная линия второго порядка плоскости $\mathbf{P_2}$ с фиксированной прямой $\boldsymbol{\ell}$ называется на аффинной плоскости $\mathbf{A_2}$:

эллипсом, если она не пересекает абсолют $\boldsymbol{\ell}$ (рис. 35 а);

гиперболой, если она пересекает абсолют $\boldsymbol{\ell}$ в двух различных точках (рис. 35 б);

параболой, если она касается абсолюта $\boldsymbol{\ell}$ (рис. 35 в).

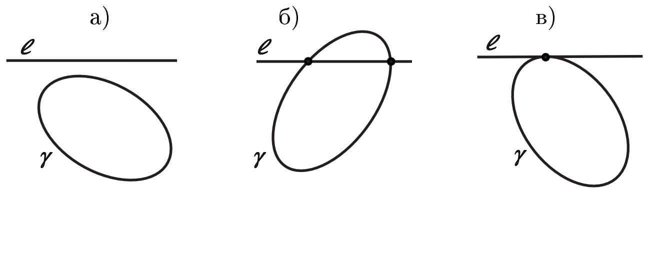

Рис. 35.

В зависимости от расположения линии второго порядка и абсолюта $\boldsymbol{\ell}$ получаем на аффинной плоскости $\mathbf{A_2}$ девять типов линий второго порядка. Классификация представлена в таблице.

Проективная классификация		*Аффинная классификация*	
1.	Мнимая овальная линия второго порядка	1.	Мнимый эллипс
2.	Овальная линия второго порядка	2.	Эллипс
		3.	Гипербола
		4.	Парабола
3.	Пара пересекающихся прямых	5.	Пара пересекающихся прямых
		6.	Пара параллельных прямых
4.	Пара пересекающихся мнимых прямых	7.	Пара пересекающихся мнимых прямых
		8.	Пара параллельных мнимых прямых
5.	Пара совпавших прямых	9.	Пара совпавших прямых

Определение. Центром линии второго порядка на аффинной плоскости $\mathbf{A_2}$ называется полюс абсолюта $\boldsymbol{\ell}$ относительно этой линии.

Заметим, что парабола не имеет центра, так как полюс абсолюта $\boldsymbol{\ell}$, являясь точкой касания параболы и абсолюта, принадлежит абсолюту.

Определение. Диаметром линии второго порядка на аффинной плоскости $\mathbf{A_2}$ называется поляра любой точки, принадлежащей абсолюту $\boldsymbol{\ell}$, относительно этой линии.

Из определения и теоремы взаимности следует, что диаметры эллипса и гиперболы проходят через центр, а все диаметры параболы параллельны.

Определение. Асимптотами гиперболы называются касательные в точках пересечения гиперболы с абсолютом.

Заметим, что асимптоты гиперболы проходят через ее центр (по теореме взаимности).

2.10 Евклидова геометрия с проективной точки зрения

Чтобы выделить евклидову геометрию из проективной, надо, исходя из идей Ф. Клейна, изложенных в Эрлангенской программе, указать, во-первых, множество, на котором строится геометрия, а во-вторых, - группу преобразований.

1. *Абсолют евклидовой геометрии. Группа подобий.*

На проективной плоскости $\mathbf{P_2}$ с фиксированной прямой $\boldsymbol{\ell}$ зададим проективный репер $R = \{A_1,\, A_2,\, A_3,\, E\}$ так, чтобы $A_1 \in \boldsymbol{\ell}$, $A_2 \in \boldsymbol{\ell}$, $A_3 \notin \boldsymbol{\ell}$, $E \notin \boldsymbol{\ell}$. Тогда прямая $\boldsymbol{\ell}$ будет иметь уравнение $x_3 = 0$. Фиксируем также овальную линию второго порядка γ, имеющую уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Прямая $\boldsymbol{\ell}$ пересекает линию γ в двух мнимо-сопряженных точках: $\boldsymbol{I}(i, 1, 0)$, $\boldsymbol{J}(-i, 1, 0)$.

Определение. Множество, состоящее из прямой $\boldsymbol{\ell}$ и двух мнимо-сопряженных точек $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, называется *абсолютом* евклидовой плоскости, $\boldsymbol{\ell}$ - *абсолютной прямой*, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$ - *абсолютными точками.*

Определение. Проективное преобразование плоскости $\mathbf{P_2}$, отображающее абсолют евклидовой плоскости на себя, называется *преобразованием подобия* евклидовой плоскости.

Очевидно, что преобразование подобия обладает следующими свойствами:

1° всякое преобразование подобия евклидовой плоскости является проективно-аффинным преобразованием;

2° преобразования подобия образуют группу преобразований, называемую *группой подобия*;

3° существуют преобразования подобия двух видов: 1) преобразования подобия, отображающие точку $\boldsymbol{I}$ в точку $\boldsymbol{I}$ и точку $\boldsymbol{J}$ в точку $\boldsymbol{J}$; 2) преобразования подобия, отображающие точку $\boldsymbol{I}$ в точку $\boldsymbol{J}$ и точку $\boldsymbol{J}$ в точку $\boldsymbol{I}$.

Выведем формулы преобразования подобия. Согласно свойству

1° всякое преобразование подобия можно задать формулами:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

где $\Delta = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$.

1. Пусть преобразование подобия f оставляет каждую из точек $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{J}$ неподвижной. Подставим координаты точки $\boldsymbol{I}$ и ее образа $\boldsymbol{I'} = \boldsymbol{I}$ в уравнения (2.10.1). Получим:

$$\rho i = a_{11}i + a_{12},\ \rho = a_{21}i + a_{22}.$$

Аналогично, для точки $\boldsymbol{J}$ и ее образа $\boldsymbol{J'} = \boldsymbol{J}$ получим:

$$-\rho i = -a_{11}i + a_{12}, \rho = -a_{21}i + a_{22}.$$

Из этих равенств найдем

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = -a_{21}. \tag{2.10.2}$$

Подставим соотношения (2.10.2) в уравнения (2.10.1):

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 - a_{21}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{11}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{2.10.3}$$

Перейдем к неоднородным проективным координатам по формулам:

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3},\ x' = \frac{x_1'}{x_3'},\ y' = \frac{x_2'}{x_3'}$$

и обозначим:

$$a = \frac{a_{11}}{a_{33}},\ b = \frac{a_{21}}{a_{33}},\ x_0 = \frac{a_{13}}{a_{33}},\ y_0 = \frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

Тогда формулы (2.10.2) примут вид:

$$\begin{aligned} x' &= ax - by + x_0, \\ y' &= bx + ay + y_0, \end{aligned} \tag{2.10.4}$$

где $\Delta = a^2 + b^2 > 0$.

Введем обозначение:

$$\cos\ \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\ \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда получим уравнения:

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + x_0, \\ y' &= k(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + y_0, \end{aligned}$$

где $k = \sqrt{a^2+b^2}$.

Это есть известные формулы преобразования подобия первого рода.

Аналогично, рассматривая преобразования подобия, которые отображают точку $\boldsymbol{I}$ в точку $\boldsymbol{J}$ и точку $\boldsymbol{J}$ в точку $\boldsymbol{I}$, найдем уравнения:

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + x_0, \\ y' &= k(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + y_0, \end{aligned}$$

где снова $k = \sqrt{a^2+b^2}$. Это известные формулы преобразования подобия второго рода.

Таким образом, евклидова геометрия получается из проективной геометрии, если в качестве евклидовой плоскости взять проективную плоскость с абсолютом, состоящим из прямой и пары мнимо-сопряженных точек на ней, а в качестве группы преобразований – группу подобий.

2. *Некоторые понятия евклидовой геометрии с проективной точки зрения.*

Определение. Прямые a и b будем называть *перпендикулярными*, если точка их пересечения не принадлежит абсолютной прямой $\boldsymbol{\ell}$ и пара точек $A = a \cap \boldsymbol{\ell}$, $B = b \cap \boldsymbol{\ell}$ гармонически разделяет пару абсолютных точек $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, т.е. $(\boldsymbol{IJ}, AB) = -1$.

Определение.Окружностью называется любая овальная линия второго порядка, пересекающая абсолютную прямую $\boldsymbol{\ell}$ в абсолютных точках $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$.

Можно показать, что уравнение окружности в неоднородных проективных координатах имеет известный вид:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2.$$

Точка $O(x_0, y_0)$ называется *центром* окружности, число r – *радиусом* окружности.

Определение. Расстоянием $|AB|$ от точки A до точки B называется радиус окружности, имеющей центр A и проходящей через точку B.

В таком случае, если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(известная формула!)

Определение. Движением евклидовой плоскости называется преобразование подобия, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками.

Из формул преобразований подобия первого и второго рода найдем, что в случае движения $k = 1$ и формулы движения имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - \varepsilon y\sin\varphi + x_0, \\ y' &= x\sin\varphi + \varepsilon y\cos\varphi + y_0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = +1$ или -1. (Известные формулы!)

СБОРНИК ЗАДАЧ

по

ПРОЕКТИВНОЙ
ГЕОМЕТРИИ

Раздел 1

Проективное пространство

1.1 Определение проективного пространства и проективной плоскости

Опираясь на аксиомы принадлежности проективного пространства доказать:

1. Через прямую a и не лежащую на ней точку A проходит одна и только одна плоскость.

2. Через всякие две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость.

3. Всякая плоскость содержит хотя бы одну точку.

4. Всякая плоскость содержит по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

5. Существуют хотя бы две прямые, не имеющие общих точек (скрещивающиеся прямые).

6. Если a, b - две скрещивающиеся прямые, A - точка, не принадлежащая ни одной из этих прямых, то существует одна и только одна прямая, проходящая через точку A и пересекающая прямые a, b.

7. Существует точка, не лежащая на данной прямой.

8. Существует точка, не лежащая на данной плоскости.

9. Существует прямая, не лежащая в данной плоскости.

10. Если точка A принадлежит плоскостям α и β, то она принадлежит прямой пересечения плоскостей α и β.

11. Существуют по меньшей мере три плоскости, проходящие через данную прямую a.

12. Вместе с прямой a существуют по меньшей мере три попарно скрещивающиеся прямые, каждая из которых пересекает прямую a.

13. Прямая и плоскость всегда имеют общую точку.

14. Две плоскости всегда имеют общую прямую.

15. Три плоскости всегда имеют общую точку.

1.2 Расширенная плоскость и расширенное пространство

Доказать, что в расширенном пространстве имеют место предложения:

16. Всякие две плоскости α и β имеют общую прямую.

17. Через точку A и не проходящую через нее прямую a проходит одна и только одна плоскость.

18. Прямая и плоскость всегда имеют общую точку.

19. Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α, то и всякая точка прямой a лежит в плоскости α.

20. Через всякие три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, проходит одна плоскость.

21. Три различные плоскости α, β и γ, не проходящие через одну прямую, пересекаются в одной и только одной точке.

22. Если a и b - скрещивающиеся прямые и точка A не принадлежит ни одной из них, то через нее можно провести одну и только одну прямую, пересекающую прямые a и b.

23. Через всякие две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость.

24. Всякие две прямые, лежащие в одной плоскости, имеют общую точку.

25. Всякая плоскость содержит хотя бы одну точку.

26. Каждая плоскость содержит по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

27. Существуют точки, не лежащие на данной прямой.

28. Существуют точки, не лежащие на данной плоскости.

29. Существует прямая, не лежащая в данной плоскости.

1.3 Проективные координаты точки на прямой

30. На прямой ℓ задан проективный репер $R = \{A_1,A_2,\ E\}$. Построить точки $A(2,3)$, $B(-2,3)$, $C(1,-1)$, $D(1,4)$, $F(5,-3)$, $K(-4,1)$, $L(-3,1)$, $M(2,5)$, $P(3,-2)$, $H(-1,3)$, $T(2,-1)$.

31. На прямой ℓ задан проективный репер $R = \{A_1,A_2,E\}$. Построить точки $A(1,2)$, $B(-3,2)$, $C(-1,1)$, $D(2,1)$, $F(2,-1)$, $K(2,-3)$, $L(5,-3)$, $M(1,4)$, $N(3,-1)$, $P(5,2)$, $T(3,-4)$, считая несобственной точку: а) $A_1(1,0)$, б) $A_2(0,1)$.

32. Выбрав на прямой ℓ произвольно две различные базисные точки $A_1(1,0)$ и $A_2(0,1)$ и считая точку E несобственной, построить точки: $A(1,2)$, $B(-3,2)$, $C(-1,1)$, $D(1,4)$, $F(3,-4)$, $G(4,-1)$, $K(-2,3)$, $L(-5,2)$, $M(5,1)$, $H(-1,3)$, $S(4,3)$, $T(2,1)$.

33. На прямой ℓ дан проективный репер $R = \{A_1,\ A_2,\ E\}$ и декартова система координат $\{O,\vec{a}\}$. Полагая, что:

а) A_1 - несобственная точка прямой ℓ, $A_2 = O$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OE}$;

б) A_2 - несобственная точка прямой ℓ, $A_1 = O$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OE}$;

в) E - несобственная точка прямой ℓ, $A_1 = O$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OA_2}$, найти декартову координату точки $M(x_1,x_2)$, если x_1, x_2 - ее проективные координаты.

34. Точка $E(1,1)$ - несобственная точка прямой ℓ. Найти проективные координаты середины отрезка A_1A_2 в репере $R = \{A_1,\ A_2,\ E\}$.

35. На прямой ℓ дан проективный репер $R = \{A_1,A_2,E\}$, при этом E - несобственная точка прямой ℓ. Найти проективные координаты точки M, делящей отрезок A_1A_2 в отношении λ.

36. На прямой ℓ дан проективный репер $R = \{A_1,A_2,E\}$, при этом E является серединой отрезка A_1A_2. Найти координаты несобственной точки прямой ℓ.

37. На прямой ℓ даны точки A_1, A_2. Построить единичную точку E репера $R = \{A_1,A_2,E\}$, если известно, что несобственная точка P_∞ имеет координаты: а)(-1,2), б)(2,1), в)(-2,1), г)(1,3), д)(-1,3), е)(1,4), ж)(3,2), з)(3,4), и)(-3,2), к)(2,5).

38. На прямой ℓ даны точки A_2, E проективного репера $R =$

$\{A_1, A_2, E\}$. Построить точку A_1, если известно, что несобственная точка P_∞ имеет координаты, указанные в задаче 37.

39. На прямой ℓ даны точки A_1, E проективного репера $R = \{A_1, A_2, E\}$. Построить точку A_2, если известно, что несобственная точка P_∞ имеет координаты, указанные в задаче 37.

40. На прямой ℓ дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, E\}$. Приняв точки $A(1,2)$ и $B(-2,1)$ за базисные, а точку $C(3,1)$ за единичную точку репера $R^{'} = \{A, B, C\}$, найти формулы преобразования координат любой точки M прямой ℓ.

41. Составить формулы преобразования проективных координат на прямой ℓ при переходе от репера $R = \{A_1, A_2, E\}$ к реперу $R^{'} = \{A_1', A_2', E'\}$, если:

1) $A_1' = A_2$, $A_2' = A_1$, $E' = E$;
2) $A_1' = E$, $A_2' = A_1$, $A_1' = A_2$;
3) $A_1' = A_1$, $A_2' = E$, $E' = A_2$;
4) $A_1'(2,-1)$, $A_2'(-1,1)$, $E'(1,0)$;
5) $A_1'(-1,1)$, $A_2'(2,3)$, $E'(1,-2)$;
6) $A_1'(2,1)$, $A_2'(-3,1)$, $E'(-1,2)$;
7) $A_1'(4,-1)$, $A_2'(2,-1)$, $E'(-3,1)$;
8) $A_1'(3,4)$, $A_2'(2,5)$, $E'(4,3)$;
9) $A_1'(1,-2)$, $A_2'(3,1)$, $E'(3,8)$;
10) $A_1'(5,-3)$, $A_2'(3,-4)$, $E'(-1,5)$;
11) $A_1'(1,5)$, $A_2'(5,3)$, $E'(1,3)$.

1.4 Проективные координаты точки на плоскости

42. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Найти координаты точек $E_1 = A_1E \cap A_2A_3$, $E_2 = A_2E \cap A_1A_3$, $E_3 = A_3E \cap A_1A_2$.

43. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ и дана точка $P(1,2,-1)$. Найти координаты точек $P_1 = A_1P \cap A_2A_3$, $P_2 = A_2P \cap A_1A_3$, $P_3 = A_3P \cap A_1A_2$.

44. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ и дана точка $M(x_1, x_2, x_3)$. Найти координаты точек $M_1 = A_1M \cap A_2A_3$, $M_2 = A_2M \cap A_1A_3$, $M_3 = A_3M \cap A_1A_2$.

45. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$.

Построить точки $A(1,2,0)$, $B(-3,0,1)$, $C(0,1,-1)$, $D(-1,3,0)$, $H(2,0,3)$, $K(0,-1,2)$ по их координатам в репере R.

46. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, при этом точка E - несобственная. Построить точки $A(0,-2,-1)$, $B(1,2,0)$, $C(-1,0,3)$, $D(2,1,0)$, $H(0,3,4)$, $K(0,3,-1)$ по их координатам в репере R.

47. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, при этом точки A_1 и A_2 - несобственные. Построить точки $A(0,2,1)$, $B(3,0,-2)$, $C(2,0,-1)$, $D(0,-1,2)$ по их координатам в репере R.

48. Пусть в проективном репере $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ точки A_1 и A_2 - несобственные. Доказать, что для собственных точек расширенной плоскости:

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \qquad \frac{x_2}{x_3} = y,$$

где x, y - аффинные координаты точки относительно аффинного репера $\{A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1}\}$, $E_1 = A_1E \cap A_2A_3$, $E_2 = A_2E \cap A_1A_3$.

49. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, при этом точки A_1 и A_2 - несобственные. Построить точки по их координатам в репере R: $A(1,4,-1)$, $B(2,1,3)$, $C(3,5,1)$, $D(-2,3,1)$, $H(4,3,1)$, $K(-5,2,3)$.

50. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Построить точки: 1)$(1,2,-1)$, 2)$(2,3,1)$, 3)$(-2,3,1)$, 4)$(2,1,3)$, 5)$(3,2,1)$, 6)$(-3,2,1)$, 7)$(4,-2,1)$, 8)$(-1,2,3)$, 9)$(-1,3,-3)$, 10)$(2,5,-5)$.

51. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, при этом точки A_1, E - несобственные. Построить точки, указанные в задаче 50.

52. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, при этом точки A_2, E - несобственные. Построить точки, указанные в задаче 50.

53. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, при этом точки A_3, E - несобственные. Построить точки, указанные в задаче 50.

54. На плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, при этом единичная точка E является точкой пересечения медианы треугольника $A_1A_2A_3$: а)построить точки, данные в задаче 50; б) найти координаты несобственных точек сторон базисного треугольника.

55. В репере $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ на проективной плоскости точки A, B,C, D имеют координаты $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$ соответственно.

1) Проверить, что точки A, B, C, D являются точками общего положения.

2) Составить формулы преобразования проективных координат при переходе от репера R к реперу $R^{'} = \{A, B, C, D\}$.

56. Составить формулы преобразования проективных координат при переходе от репера $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ к реперу $R^{'} = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$, если в репере R' точки A'_1, A'_2, A'_3, E' имеют координаты:

1) $A'_1(1, 0, 0)$, $A'_2(0, 1, 0)$, $A'_3(1, 2, -1)$, $E'(0, 1, 3)$;
2) $A'_1(1, 0, -1)$, $A'_2(2, 1, 0)$, $A'_3(0, 0, 1)$, $E'(1, 1, 2)$;
3) $A'_1(0, 1, 0)$, $A'_2(-1, 0, 1)$, $A'_3(2, 1, 0)$, $E'(1, 2, 1)$;
4) $A'_1(0, 1, 0)$, $A'_2(0, 0, 1)$, $A'_3(1, 0, 0)$, $E'(1, 1, 1)$;
5) $A'_1(1, 1, 1)$, $A'_2(1, -2, 1)$, $A'_3(-2, 0, 1)$, $E'(0, -1, 3)$;
6) $A'_1(-2, 3, 1)$, $A'_2(1, 0, -2)$, $A'_3(1, -1, 2)$, $E'(2, 1, 1)$;
7) $A'_1(1, -2, 1)$, $A'_2(0, 1, -3)$, $A'_3(1, 1, 1)$, $E'(2, -6, -1)$;
8) $A'_1(0, 0, 1)$, $A'_2(2, 3, 1)$, $A'_3(-2, 1, 5)$, $E'(0, 4, 1)$;
9) $A'_1(-1, 1, 0)$, $A'_2(0, 2, 3)$, $A'_3(3, 5, 1)$, $E'(-5, 3, -5)$;
10) $A'_1(3, -1, 5)$, $A'_2(1, 0, 4)$, $A'_3(-2, 1, 1)$, $E'(-2, 1, 3)$.

1.5 Уравнение прямой на проективной плоскости. Уравнение пучка прямых

57. На проективной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Составить уравнения: 1) сторон базисного треугольника $A_1A_2A_3$; 2) прямых A_1E, A_2E, A_3E.

58. Написать уравнение прямой AB и составить параметрические уравнения прямой AB, если:

а) $A(3, 0, -1)$, $B(-1, 3, 0)$;
б) $A(-1, 2, 0)$, $B(1, 1, 3)$;
в) $A(0, 5, 1)$, $B(-2, 1, 7)$;
г) $A(1, 3, 1)$, $B(-2, 1, 0)$;
д) $A(-1, 1, 0)$, $B(2, 3, 5)$;
е) $A(3, 2, 1)$, $B(-5, 0, 1)$.

59. Проверить лежат ли точки A, B, C на одной прямой, если:

а) $A(1, 2, -1)$, $B(-3, 1, 1)$, $C(-1, 5, -1)$;

б) $A(0, 1, 3)$, $B(-5, -1, 3)$, $C(10, 3, -3)$;
в) $A(2, 1, 0)$, $B(-5, 13, -3)$, $C(-3, 5, -1)$;
г) $A(0, -4, 1)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, -2, 5)$;
д) $A(1, -1, 2)$, $B(0, 3, -1)$ $C(-1, -5, 0)$;
е) $A(-2, 0, 3)$, $B(1, 5, -2)$, $C(0, 5, 3)$.

60. Доказать, что точки $K(3, -2, 1)$, $L(0, 1, -1), M(1, -2, 5)$ определяют треугольник.

61. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Составить уравнение несобственной прямой, если несобственными точками являются: а) A_1, A_2; б) A_2, A_3; в) A_1, A_3; г) A_1, E; д) A_2, E; е) A_3, E.

62. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точки A_1, A_2 - несобственные. Найти координаты несобственной точки прямой AB, если:

а) $A(-5, 2, 1)$, $B(1, 3, 3)$;
б) $A(2, 1, -3)$, $B(1, -2, 1)$;
в) $A(7, 6, 4)$, $B(3, -3, 2)$;
г) $A(3, 1, -1)$, $B(-1, 2, 3)$;
д) $A(-1, 3, 1)$, $B(2, 2, 1)$;
е) $A(-2, 3, 3)$, $B(1, -2, 5)$.

63. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точки A_2, A_3 - несобственные. Найти координаты несобственной точки прямой AB в задаче 62.

64. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точки A_1, A_3 - несобственные. Найти координаты несобственной точки прямой AB в задаче 62.

65. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точки A_1, E - несобственные. Найти координаты несобственной точки прямой AB в задаче 62.

66. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точки A_2, E - несобственные. Найти координаты несобственной точки прямой AB в задаче 62.

67. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точки A_3, E - несобственные. Найти координаты несобственной точки прямой AB в задаче 62.

68. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точки A_1, A_2 - несобственные. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M и параллельную данной прямой a, если:

1) $M(1,-2,3)$, $a: 2x_1+x_2-3x_3=0$;
2) $M(4,1,1)$, $a: x_1-7x_2+x_3=0$;
3) $M(-1,1,3)$, $a: x_1+x_2+x_3=0$;
4) $M(-1,2,2)$, $a: 3x_1-x_2+x_3=0$;
5) $M(2,1,-3)$, $a: 2x_1+2x_2-x_3=0$;
6) $M(3,3,2)$, $a: x_1-4x_2+2x_3=0$;
7) $M(-3,1,2)$, $a: x_1+x_2-x_3=0$;
8) $M(1,1,2)$, $a: 2x_1-3x_2+x_3=0$;
9) $M(1,-1,3)$, $a: 3x_1+3x_2-x_3=0$;
10) $M(2,-1,1)$, $a: 5x_1-7x_2-x_3=0$.

69. На расширенной плоскости дан проективный репер $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором несобственными точками являются:а) A_2, A_3; б) A_1, A_3; в) A_1, E; г) A_2, E; д) A_3, E. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M и параллельную данной прямой a, указанных в задаче 68.

70. Найти координаты и уравнение прямой, проходящей через точки $(1,2,-1)$, $(3,5,-2)$.

71. Найти координаты точки пересечения прямых:

а) $x_1-x_2+2x_3=0$ и $2x_1+5x_2+4x_3=0$;
б) $2x_1+2x_2-x_3=0$ и $3x_1-5x_2+2x_3=0$;
в) $x_1-x_2+x_3=0$ и $2x_1-x_2+5x_3=0$;
г) $x_1-2x_2-2x_3=0$ и $x_1+3x_2-x_3=0$;
д) $2x_1-x_2+x_3=0$ и $x_1+x_2-x_3=0$;
е) $2x_1+3x_2-x_3=0$ и $x_1-2x_2+x_3=0$;
ж) $x_1-3x_2-3x_3=0$ и $2x_1+x_2+x_3=0$;
з) $3x_1+x_2+2x_3=0$ и $x_1-x_2+2x_3=0$;
и) $3x_1-x_2+5x_3=0$ и $3x_1+2x_2-5x_3=0$;
к) $x_1+5x_2-3x_3=0$ и $x_1+x_2+3x_3=0$.

72. Доказать, что прямые a, b, c принадлежат одному пучку:

1) $a(5,1,3)$, $b(-2,4,3)$, $c(8,6,9)$;
2) $a(1,1,0)$, $b(2,-1,3)$, $c(5,2,3)$;
3) $a(1,-1,2)$, $b(5,3,0)$, $c(3,1,1)$;
4) $a(0,2,-3)$, $b(1,-2,4)$, $c(1,2,-2)$; .
5) $a(-3,1,2)$, $b(2,0,-1)$, $c(3,-5,-4)$;
6) $a(-1,2,0)$, $b(1,1,5)$, $c(2,-7,-5)$;
7) $a(1,3,3)$, $b(2,-1,2)$, $c(3,2,5)$;

8) $a(1,2,5)$, $b(3,0,1)$, $c(-1,1,2)$;
9) $a(1,-2,3)$, $b(1,4,-1)$, $c(3,0,5)$; .
10) $a(2,2,1)$, $b(0,-2,5)$, $c(1,0,3)$

73. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Построить прямую ℓ, если даны ее координаты: 1) $(1,2,0)$; 2) $(0,-3,1)$; 3) $(4,0,-1)$; 4) $(1,2,2)$; 5) $(1,2,3)$; 6) $(-1,2,3)$; 7) $(3,-2,1)$; 8) $(2,-1,4)$; 9) $(2,3,1)$; 10) $(-2,1,1)$ 11) $(3,2,3)$; 12) $(1,-3,1)$.

74. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точка E несобственная. Построить прямую ℓ по ее координатам, указанным в задаче 72.

75. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, в котором точки A_1, A_2 - несобственные. Построить прямую ℓ по ее координатам, указанным в задаче 72.

1.6 Принцип двойственности

76. Сформулировать предложения, двойственные по большому и малому принципам двойственности следующим предложениям:

а) через всякие две точки проходит одна и только одна прямая;

б) существует по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой;

в) через каждые три неколлинеарные точки проходит одна и только одна плоскость;

г) если две точки A, B прямой a лежат на плоскости α, то прямая AB лежит в плоскости α;

д) существует не менее четырех точек, не лежащих на одной плоскости;

е) если две прямые a, b лежат в плоскости α, то существует точка, принадлежащая как прямой a, так и прямой b;

ж) если точка A принадлежит обеим плоскостям α и β, то она принадлежит и прямой пересечения этих плоскостей;

з) если прямая a не лежит в плоскости α, то она пересекает эту плоскость в одной и только одной точке;

и) существует точка, не лежащая на данной прямой;

к) существует точка, не лежащая в данной плоскости;

л) существует прямая, лежащая в данной плоскости;

м) если прямая a лежит в плоскости α, то существует в плоскости α точка, не принадлежащая прямой a;

н) если a, b - две скрещивающиеся прямые, A - точка, не принадлежащая ни одной из этих прямых, то существует одна и только одна прямая, проходящая через точку A и пересекающая прямые a и b;

о) если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке O, то точки $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$, $R = AC \cap A'C'$ лежат на одной прямой.

77. Определить фигуры, двойственные треугольнику по большому и малому принципам двойственности.

78. Даны две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой ℓ, и точка M, принадлежащая прямой ℓ. Определить двойственную фигуру.

79. Даны две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой ℓ, две точки A и B, принадлежащие соответственно плоскостям α и β и не принадлежащие прямой ℓ, и прямая m, проходящая через точки A и B. Определить двойственную фигуру.

80. Дан треугольник ABC и произвольная точка M в его плоскости. Строим прямые AM, BM и CM. Они пересекают стороны треугольника в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Строим треугольник $A_0B_0C_0$, вписанный в данный треугольник ABC. Выполнить двойственные построения по малому принципу двойственности.

81. Полным четырехвершинником (четырехугольником) называется множество, состоящее из четырех точек общего положения (никакие три из них не лежат на одной прямой) и шести прямых, попарно их соединяющих. Определить двойственную фигуру по малому принципу двойственности.

82. На прямой s даны три точки A, B, C. Через точку A проведем произвольно прямые ℓ и m, а через точку C - прямую n. Найдем точки $Y = \ell \cap n$,$W = m \cap n$, $Z = BY \cap m$, $X = BW \cap \ell$ и точку $D = s \cap XZ$. Выполнить двойственные построения по малому принципу двойственности.

83. Даны три плоскости α, β, γ, попарно пересекающиеся по трем различным прямым a, b, c. Определить двойственную фигуру.

84. Дан треугольник ABC и прямая p, лежащая в его плоскости.

Прямая p пересекает стороны AB, BC, AC в точках H, K, M соответственно. Прямые HC, KA, MB образуют треугольник PQR. Выполнить двойственные построения по малому принципу двойственности.

85. Прямая a пересекает плоскость α в точке A, прямая b лежит в плоскости α и не проходит через точку A. Определить двойственную фигуру.

86. Прямые a и b лежат в плоскости α и пересекаются в точке P. Прямая c проходит через точку P и не лежит в плоскости α. Определить двойственную фигуру.

87. На расширенной плоскости определить фигуру, двойственную параллелограмму.

1.7 Теорема Дезарга

88. Проверьте на чертеже основные свойства конфигурации Дезарга:

1° для любой точки конфигурации Дезарга
можно подобрать такие два треугольника этой же конфигурации, для которых данная точка будет дезарговым центром;

2° для любой прямой конфигурации Дезарга можно подобрать такие два треугольника этой же конфигурации, для которых данная прямая будет дезарговой осью.

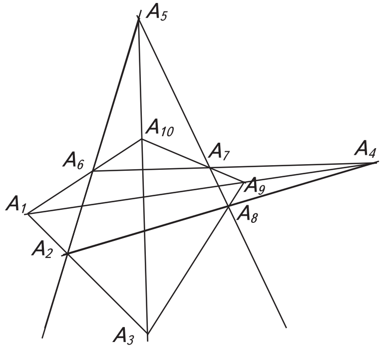

Рис. 36.

89. На рисунке 36 дана конфигурация Дезарга. Укажите пару дезарговых треугольников и дезаргову ось, если дезарговым центром является точка: а) A_1, б) A_2, в) A_3, г) A_4, д) A_5, е) A_6, ж) A_7, з) A_8, и) A_9, к) A_{10}. Укажите пару дезарговых треугольников и дезаргов центр, если дезарговой осью является: л) A_1A_2, м) A_1A_4, н) A_1A_6, о) A_2A_6, п) A_2A_8, р) A_4A_6, с) A_3A_{10}, т) A_3A_9, у) A_9A_{10}, ф) A_7A_8.

90. В евклидовой плоскости в четырехугольник вписана трапеция, параллельные стороны которой параллельны его диагонали. Доказать, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали.

91. В евклидовой плоскости дан треугольник и три параллелограмма, для каждого из которых одна сторона треугольника служит диагональю, а две другие — смежными сторонами. Доказать, что вторые диагонали этих параллелограммов пересекаются в одной точке.

92. В трапеции $ABCD$ проведена через середины оснований BC и AD прямая и на ней взяты произвольно точки M и P. Доказать, что прямая KL, где $K = AM \cap BP$ и $L = DM \cap CP$, параллельна основаниям.

93. В евклидовой плоскости противоположные вершины одного параллелограмма расположены соответственно на противоположных сторонах другого. Доказать, что оба параллелограмма имеют общий центр симметрии.

94. Если у треугольников $A_iB_iC_i$ $(i = 1, 2, 3)$ соответствующие вершины A_i, B_i, C_i принадлежат соответственно прямым a, b, c, проходящим через одну точку, то три соответствующие дезарговы оси проходят через одну точку.

95. В треугольнике ABC из его вершины проведены прямые, пересекающиеся в одной точке S : $A' = AS \cap BC$, $B' = BS \cap AC$, $C' = CS \cap AB$. Доказать, что точки $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$, $AB \cap A'B'$ лежат на одной прямой.

96. Прямая p лежит в плоскости треугольника ABC; $K = BC \cap p$, $L = CA \cap p$, $M = AB \cap p$, $R = BL \cap CM$, $S = CM \cap AK$, $T = AK \cap BL$. Доказать, что прямые AR, BS и CT пересекаются в одной точке.

97. Трапеция $ABCD$ пересечена прямыми p и q, параллельными основанию AB; $p \cap AD = M$, $p \cap AC = P$, $q \cap BD = N$, $q \cap BC = Q$. Доказать, что точка $MN \cap PQ$ лежит на прямой AB.

98. Треугольники ABC и DBC пересечены двумя прямыми p и q, параллельными прямой AD, соединяющей вершины A и D треугольников; $p \cap AB = M$, $p \cap DB = P$, $q \cap AC = N$, $q \cap DC = Q$. Доказать, что прямые MN, PQ, BC принадлежат одному пучку.

99. Дана трапеция $ABCD$. Через точку $P = AB \cap CD$ проведена прямая ℓ, пересекающая основания BC и AD соответственно в точках K и M. Доказать, что прямая, соединяющая точки пересечения диагоналей трапеций $ABKM$ и $MKCD$ параллельна основаниям трапеции.

100. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, $P = AB \cap CD$. Параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD соответственно в точках H и K. Доказать, что прямая, соединяющая точки пересечения диагоналей трапеций $AHKD$ и $HBCK$ проходит через точку P.

101. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$; $E = AB \cap CD$, $H = BC \cap AD$. Через точку E проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Доказать, что прямая, соединяющая точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABKM$ и $MKCD$, проходит через точку H.

102. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Построены точки $H = AD \cap CE$, $O = AC \cap BH$, $K = AB \cap OD$, $M = BC \cap OE$. Доказать:

а) если $AC \not\parallel DE$ и $P = AC \cap DE$, то точки K, M, P лежат на одной прямой;

б) если $AC || DE$, то $KM || AC$.

103. В шестиугольнике $ABCDEF$ большие диагонали пересекаются в одной точке. Доказать, что точки пересечения $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ противоположных сторон шестиугольника и точка пересечения $R = AC \cap DF$ его малых диагоналей лежат на одной прямой.

104. В четырехугольнике $ABCD$ построены точки $M = AB \cap CD$, $H = BC \cap AD$, $K = AC \cap BD$. Прямая MK пересекает противоположные стороны AD и BC соответственно в точках E и P. Доказать, что прямые AP, BE, HK пересекаются в одной точке.

105. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD через вершины A и B параллельные прямые a и b, а через вершины C и D - параллельные прямые c и d. Доказать, что точки $H = AB \cap CD$, $K = b \cap c$, $M = a \cap d$ лежат на одной прямой.

106. Дан четырехугольник $ABCD$. Через точки пересечения противоположных сторон $K = AB \cap CD$, $H = BC \cap AD$ и точку пересечения диагоналей $E = AC \cap BD$ проведены прямые HE и KE, пересекающие стороны AB и BC в точках $P = HE \cap AB$, $M = KE \cap BC$. Доказать, что точка $T = HK \cap MP$ лежит на диагонали CA.

107. В шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны попарно параллельны. Построены точки $H = BC \cap AF$, $K = BC \cap DE$, $M = DE \cap AF$, $P = AB \cap CD$, $T = AB \cap EF$, $O = EF \cap CD$. Доказать, что прямые HO, PM, KT пересекаются в одной точке.

108. В трапеции $ABCD$ через вершины основания AB проведены прямые a и b, параллельные боковым сторонам и пересекающиеся в точке E. Доказать, что прямая, соединяющая точку пересечения непараллельных сторон трапеции с точкой пересечения ее диагоналей, проходит через точку E.

109. Дан треугольник ABC и три точки P, Q, R, лежащие на прямой a. Построены точки $M = CQ \cap AB$, $S = CR \cap PM$, $Y = BS \cap AC$, $X = RY \cap BC$. Доказать, что точка $Z = PY \cap QX$ принадлежит прямой AB.

110. Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает стороны AB и BC соответственно в точках H и K. Через точки H и K проведены прямые $a||BC$, $b||AB$ и пересекающиеся в точке M. Доказать, что прямая BM проходит через точку пересечения прямых HC и AK.

111. Если дезарговы оси трех попарно дезарговых треугольников ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ совпадают, то их дезарговы центры лежат на одной прямой.

112. Доказать, что композиция двух гомотетий с различными центрами O_1 и O_2 есть или гомотетия с центром, лежащим на прямой O_1O_2, или параллельный перенос, направление которого совпадает с направлением прямой O_1O_2.

В задачах 113 - 118 дан выпуклый шестиугольник и приняты обозначения:
a и a', b и b', c и c' - прямые, содержащие пары противоположных сторон;
$a_0 = (b \cap c) \cdot (b' \cap c')$, $b_0 = (a' \cap c) \cdot (a \cap c')$, $c_0 = (a \cap b) \cdot (a' \cap b')$ - прямые, содержащие противоположные вершины (большие диагонали);
$a_1 = (a \cap b) \cdot (c \cap a')$, $a_2 = (a' \cap b') \cdot (a \cap c')$;
$b_1 = (a \cap b) \cdot (c' \cap b')$, $b_2 = (b \cap c) \cdot (a' \cap b')$;
$c_1 = (b \cap c) \cdot (a \cap c')$, $c_2 = (b' \cap c') \cdot (a' \cap c)$
- прямые, содержащие другие (малые) диагонали;
$A = a \cap a'$, $B = b \cap b'$, $C = c \cap c'$;
$A_0 = a_1 \cap a_2$, $B_0 = b_1 \cap b_2$, $C_0 = c_1 \cap c_2$;

$A_1 = b \cap c'$, $A_2 = b_1 \cap c_1$, $A_3 = b_0 \cap c_0$, $A_4 = c \cap b'$, $A_5 = b_2 \cap c_2$. (Здесь знак "$\cdot$" обозначает соединение точек).

113. Пусть в шестиугольнике большие диагонали a_0, b_0, c_0 пересекаются в одной точке. Доказать, что:
1) если $a \nparallel a'$, $b \nparallel b'$, $c_1 \nparallel c_2$, то точки A, B, C_0 лежат на одной прямой;
2) если $a \nparallel a'$, $b \nparallel b'$, $c_1 || c_2$, то $AB || c_1$;
3) если $a \nparallel a'$, $b || b'$, $c_1 \nparallel c_2$, то $AC_0 || b$;
4) если $a || a'$, $c_1 || c_2$, то $b || b'$;
5) если $a || a'$, $b || b'$, то $c_1 || c_2$.

114. Доказать, что в шестиугольнике большие диагонали a_0, b_0, c_0 пересекаются в одной точке, если дано:
1) точки A, B, C_0 лежат на одной прямой;
2) $AB || c_1$, $c_1 || c_2$;
3) $b || b'$, $AC_0 || b$;
4) $a \parallel a'$, $b || b'$, $c_1 || c_2$;
5) точки A_0, B_0, C_0 лежат на одной прямой;
6) $c_1 || c_2$, $A_0 B_0 || c_1$;
7) $a_1 || a_2$, $b_1 || b_2$, $c_1 || c_2$.

115. Пусть в шестиугольнике прямые a_0, a, a' пересекаются в одной точке. Доказать, что:
1) если $b \nparallel c'$, $c \nparallel b'$, $a_1 \nparallel a_2$, то точки A_1, A_4, A_0 лежат на одной прямой;
2) если $b \nparallel c'$, $c \nparallel b'$, $a_1 || a_2$, то $A_1 A_4 || a_1$;
3) если $b \nparallel c'$, $a_1 \nparallel a_2$, $c || b'$, то $A_1 A_0 || c$;
4) если $c \nparallel b'$, то точки A_2, A_3, A_4 лежат на одной прямой;
5) если $c \parallel b'$, то $A_2 A_3 || c$;
6) если $a_1 \nparallel a_2$ то точки A_0, A_2, A_5 лежат на одной прямой;
7) если $a_1 || a_2$ то $A_2 A_5 || a_1$.

116. Доказать, что если в шестиугольнике $a \nparallel a'$, то $A \in a_0$, если дано:
1) A_1, A_4, A_0 лежат на одной прямой $(b \nparallel c', c \nparallel b', a_1 \nparallel a_2)$;
2) $a_1 || a_2 || A_1 A_4$ $(b \nparallel c', c \nparallel b')$;
3) $c || b' || A_0 A_1$ $(b \nparallel c', a_1 \nparallel a_2)$;
4) точки A_2, A_3, A_4 лежат на одной прямой $(c \nparallel b')$;
5) $c || b' || A_2 A_3$;
6) точки A_0, A_2, A_5 лежат на одной прямой $(a_1 \nparallel a_2)$;
7) $a_1 || a_2 || A_2 A_5$.

117. Пусть в шестиугольнике $a||a'||a_0$. Доказать, что:
1) если $b \nparallel c'$, $c \nparallel b'$, $a_1 \nparallel a_2$, то точки A_1, A_4, A_0 лежат на одной прямой;
2) если $b \nparallel c'$, $c \nparallel b'$, $a_1||a_2$, то $A_1A_4||a_1$;
3) если $b \nparallel c'$, $a_1 \nparallel a_2$, $c||b'$, то $A_1A_0||c$;
4) если $c \nparallel b'$ то точки A_2, A_3, A_4 лежат на одной прямой;
5) если $c\|\, b'$, то $A_2A_3||c$;
6) если $a_1 \nparallel a_2$, то точки A_0, A_2, A_5 лежат на одной прямой;
7) если $a_1||a_2$, то $A_2A_5||a_1$.

118. Пусть в шестиугольнике $a||a'$. Доказать, что $a_0||a$, если:
1) A_1, A_4, A_0 лежат на одной прямой $(b \nparallel c', c \nparallel b', a_1 \nparallel a_2)$;
2) $a_1||a_2||A_1A_4$ $(b \nparallel c', c \nparallel b')$;
3) $c||b'||A_0A_1$ $(b \nparallel c', a_1 \nparallel a_2)$;
4) точки A_2, A_3, A_4 лежат на одной прямой $(c \nparallel b')$;
5) $c||b'||A_2A_3$;
6) точки A_0, A_2, A_5 лежат на одной прямой $(a_1 \nparallel a_2)$;
7) $a_1||a_2||A_2A_5$.

119. Даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке L, которая лежит за пределами чертежа. Дана точка C, не лежащая ни на одной из этих прямых. Построить прямую LC.

120. Даны две точки P и Q и не проходящая через них прямая c. Построить точку пересечения прямой PQ с прямой c, не проводя прямой PQ.

121. Через данную точку A и недоступную точку B пересечения данных прямых a и a', не проходящих через точку A, провести прямую, пользуясь одной линейкой.

122. Построить, пользуясь одной линейкой, точку пересечения данной прямой ℓ с прямой, проходящей через данную точку P и недоступную точку Q пересечения данных прямых a и a', не содержащих точку P.

123. Даны две пары прямых a и a', b и b', такие, что прямые каждой пары пересекаются в точках P и Q вне пределов чертежа. Построить точку пересечения прямой PQ с данной прямой c.

124. Пользуясь одной линейкой, построить точку пересечения данной прямой a с недоступной прямой, определяемой точками A и B.

125. Провести прямую через две точки A и B с помощью линейки, длина которой меньше длины отрезка AB.

126. В евклидовой плоскости дан параллелограмм $ABCD$ и дана точка E, лежащая на одной из сторон параллелограмма. Через точку E, пользуясь одной линейкой, провести прямую, параллельную данной прямой ℓ.

127. Даны точки A и B. Пользуясь одной линейкой, построить какую-либо точку прямой AB, не проводя этой прямой.

128. На чертеже ограниченных размеров заданы две пары прямых: a и a', пересекающиеся в точке P, и b и b', пересекающиеся в недоступной точке Q. Построить точку пересечения прямой PQ с данной прямой ℓ.

129. Дана трапеция $ABCD$, $BC||AD$ и дана точка M вне трапеции. Пользуясь одной линейкой, провести через точку M прямую, параллельную основаниям трапеции.

130. На евклидовой плоскости даны параллелограмм, прямая ℓ и не лежащая на этой прямой точка M. Пользуясь одной линейкой, провести через точку M прямую, параллельную прямой ℓ.

В задачах 131-147 выполнить построения, пользуясь одной линейкой.

131. Даны две пары прямых: $a \cap a' = P$ и $b \cap b' = Q$. Считая точки P и Q недоступными, построить какую-либо точку прямой PQ.

132. Даны две пары параллельных прямых: $a||a'$, $b||b'$ и прямая ℓ, не параллельная им. Через точку A, лежащую на прямой a, провести прямую, параллельную прямой ℓ.

133. Дана точка A и две прямые b и b', пересекающиеся в недоступной точке B. Построить какую-либо точку, принадлежащую прямой AB.

134. Даны прямые a и a', пересекающиеся в недоступной точке K, прямая b и точка M, не лежащая ни на одной из данных прямых. Построить точку пересечения прямой b с прямой KM.

135. Дан четырехугольник $ABCD$. Провести какую-либо прямую через недоступную точку пересечения прямых, содержащих пару противоположных сторон четырехугольника.

136. Дан четырехугольник $ABCD$. Провести прямую через точку пересечения диагоналей и недоступную точку пересечения прямых, содержащих две противоположные стороны четырехугольника.

137. Дана трапеция $ABCD$ ($BC||AD$) и точка M, принадлежащая боковой стороне AB. Через точку M провести прямую, параллельную основаниям.

138. Боковые стороны трапеции $ABCD$ пересечены прямой, параллельной основаниям трапеции. Провести прямую через недоступную точку пересечения боковых сторон.

139. Дан четырехугольник $ABCD$, при этом точки $H = AB \cap CD$, $K = BC \cap AD$ - недоступные. Построить какую-либо точку прямой HK.

140. Полагая в четырехугольнике $ABCD$ недоступными точки $H = AB \cap CD$, $E = AC \cap BD$, построить какую-либо точку прямой HE.

141. Через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ провести прямую, параллельную основаниям трапеции.

142. В треугольник ABC вписать треугольник XYZ : $X \in BC$, $Y \in AC$, $Z \in AB$ так, чтобы точки пересечения $P = XY \cap AB$, $Q = YZ \cap BC$, $R = ZX \cap CA$ лежали на одной прямой.

143. Дан треугольник ABC и три точки P, Q, R в его плоскости, лежащие на прямой a. Построить треугольник XYZ так, чтобы его вершины X, Y, Z лежали соответственно на прямых BC, CA, AB, а прямые YZ, ZX, XY проходили через точки P, Q, R.

144. В данный четырехугольник $ABCD$ вписать четырехугольник так, чтобы его вершины лежали на сторонах, а точки пересечения прямых, содержащих пары противоположных сторон, - на диагоналях данного четырехугольника.

145. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка P, принадлежащая стороне AB. Через точку P провести прямую, параллельную диагонали AC.

146. Дана трапеция $ABCD$. Через точку $E = AB \cap CD$ провести прямую, параллельную основаниям трапеции.

147. Дан параллелограмм $ABCD$; точка P принадлежит продолжению стороны AB. Через точку P провести прямую, параллельную диагонали AC.

1.8 Проективные преобразования плоскости

148. На проективной плоскости дан проективный репер $R =$

$\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ E\}$. Найти проективное преобразование T, для которого:
а) $A_2 = T(A_1),\ A_1 = T(A_2),\ E = T(A_3),\ A_3 = T(E)$;
б) $A_2 = T(A_1),\ A_3 = T(A_2),\ A_1 = T(A_3),\ E = T(E)$;
в) $A_1 = T(A_1),\ A_2 = T(A_2),\ A_3 = T(A_3),\ E' = T(E),\ E'(c_1, c_2, c_3)$.

149. Найти общий вид тех проективных преобразований, которые переводят прямую $x_3 = 0$ в ту же прямую.

150. Найти такое проективное преобразование, которое оставляет на месте точки прямой $x_3 = 0$.

151. Найти такое проективное преобразование, которое точку A_3(0,0,1) оставляет на месте, а прямые A_3A_1 $(x_2 = 0)$ и A_3A_2 $(x_1 = 0)$ переводит в те же прямые.

152. Найти все проективные преобразования плоскости, которые оставляют неподвижными базисные точки A_1 $(1, 0, 0)$, A_2 (0,1,0) и A_3 (0,0,1), а единичную точку E отображают в точку $E'(a, b, c)$.

153. Дано проективное преобразование плоскости:
$\rho x'_1 = x_1 + x_2 - x_3,\ \rho x'_2 = x_1 - 4x_2,\ \rho x'_3 = x_1 + x_2$. Найти образы базисных точек A_1, A_2, A_3 и единичной точки E.

154. Дано проективное преобразование плоскости:
$\rho x'_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3,\ \rho x'_2 = 3x_1 - x_2 + 4x_3,\ \rho x'_3 = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$.
Найти образы точек: $A(1, 2, 3),\ B(2, -1, 4),\ C(-1, 0, 1),$
$D(0, 2, 5),\ E(1, -3, 4),\ H(-2, 0, 3),\ K(3, 1, 1),\ M(-5, 1, 0),$
P(2,2,1), $T(-4,\ 1,\ 3)$, S(2,3,1).

155. Дано проективное преобразование плоскости:
$\rho x'_1 = x_1 - 2x_2 + x_3,\ \rho x'_2 = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3,\ \rho x'_3 = x_1 - x_2$.
Найти образы прямых: $a(1, 2, 3),\ b(-1, 2, 5),\ c(0, 4, -3),$
$d(1, -3, 1), e(2, 3, 1),\ h(-2, 0, 1),\ k(3, 3, -2),\ m(-4, 1, 3),$
$p(1, -1, 0),\ t(-3, 0, 1),\ s(1, -5, 4)$.

156. Как преобразуются координаты прямой в проективном преобразовании:

1) $\rho x'_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ \rho x'_2 = x_3,\ \rho x'_3 = x_2$;
2) $\rho x'_1 = 2x_1 - x_2,\ \rho x'_2 = x_1 + x_2 - x_3,\ \rho x'_3 = x_2 - 2x_3$;

3) $\rho x_1' = x_1 - x_2,\ \rho x_2' = x_2 - x_3,\ \rho x_3' = x_1 + x_3;$
4) $\rho x_1' = x_1,\ \rho x_2' = x_2 + x_3,\ \rho x_3' = x_1 + x_2;$
5) $\rho x_1' = x_1 - 2x_2,\ \rho x_2' = 3x_1 + x_2 - 4x_3,\ \rho x_3' = x_3;$
6) $\rho x_1' = x_3,\ \rho x_2' = x_1,\ \rho x_3' = x_2;$
7) $\rho x_1' = x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ \rho x_2' = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3,$
$\rho x_3' = 2x_1 - 2x_2 + x_3;$
8) $\rho x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3,\ \rho x_2' = x_1 - 2x_2 + 4x_3,$
$\rho x_3' = 3x_1 + x_2 - 2x_3.$

157. Дано проективное преобразование плоскости: $\rho x_1' = x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ \rho x_2' = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3,\ \rho x_3' = 2x_1 - 2x_2 + x_3$. Найти образы сторон базисного треугольника $A_1A_2A_3$.

158. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ E\}$, в котором точки A_1, A_2 - несобственные. Найти несобственные точки плоскости, которые переходят друг в друга при проективном преобразовании: $\rho x_1' = x_1 - 2x_2 + 3x_3,\ \rho x_2' = 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ \rho x_3' = 4x_1 - 2x_2 + 5x_3$.

159. Найти проективное преобразование, переводящее базисные точки $A_1,\ A_2,\ A_3$ и единичную точку E соответственно в точки:

а) $(2,3,8)$,	$(3,-5,9)$,	$(-7,4,1)$,	$(1,-1,0)$;
б) $(2,1,0)$,	$(0,1,1)$,	$(1,-1,1)$,	$(1,3,0)$;
в) $(1,1,0)$,	$(-2,1,1)$,	$(0,2,1)$,	$(1,0,0)$;
г) $(1,-2,1)$,	$(0,3,1)$,	$(1,1,4)$,	$(1,1,3)$;
д) $(-2,1,0)$,	$(0,2,3)$,	$(-2,3,1)$,	$(2,5,0)$;
е) $(0,2,1)$,	$(3,3,1)$,	$(-2,0,3)$,	$(0,-2,7)$.

160. Найти проективное преобразование, переводящее точки A, B, C, D соответственно в точки A', B', C', D', если:

а) $A(1,0,1)$,	$B(2,1,1)$,	$C(3,-1,0)$,	$D(2,5,2)$,
$A'(-1,0,3)$,	$B'(2,1,3)$,	$C'(2,3,8)$,	$D'(3,0,-4)$;
б) $A(0,0,1)$,	$B(1,2,0)$,	$C(1,0,1)$,	$D(0,1,0)$,
$A'(1,2,0)$,	$B'(1,0,1)$,	$C'(0,1,0)$,	$D'(0,0,1)$;
в) $A(2,1,1)$,	$B(1,2,1)$,	$C(1,-1,1)$,	$D(-1,1,1)$,
$A'(2,1,5)$,	$B'(2,-1,3)$,	$C'(-1,2,3)$,	$D'(1,2,1)$;
г) $A(1,2,3)$,	$B(2,-1,4)$,	$C(-1,0,1)$,	$D(1,0,3)$,
$A'(-1,13,14)$,	$B'(11,23,28)$,	$C'(-1,1,2)$,	$D'(5,15,18)$;
д) $A(2,1,0)$,	$B(3,1,1)$,	$C(1,2,-1)$,	$D(0,-3,2)$,
$A'(0,6,1)$,	$B'(2,13,2)$,	$C'(4,3,1)$,	$D'(8,0,3)$.

161. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые проективного преобразования:

а) $\rho x_1' = 4x_1 - x_2,\ \rho x_2' = 6x_1 - 3x_2,\ \rho x_3' = x_1 - x_2 - x_3;$
б) $\rho x_1' = x_2 + x_3,\ \rho x_2' = x_1 + x_2,\ \rho x_3' = x_1 + x_2;$
в) $\rho x_1' = x_2 - x_3,\ \rho x_2' = x_1 + x_3,\ \rho x_3' = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3.$

162. Доказать, что всякое проективное преобразование имеет хотя бы одну неподвижную точку и по меньшей мере одну инвариантную прямую.

163. Проективное преобразование f отображает четверку точек A_1, A_2, A_3, E общего положения в четверку точек общего положения A_1, A_2, A_3, E', оставляя неподвижными первые три точки. Построить $M' = f(M)$ (точка M выбрана произвольно).

164. Проективное преобразование плоскости задано двумя четверками точек общего положения: A, B, C, D и A', B', C', D'. Построить образ M' произвольной точки M плоскости.

1.9 Проективные отображения и преобразования прямых и пучков

165. Проективное преобразование прямой ℓ задано тремя парами соответственных точек: $A_1(1,0)$ и $A_1'(1,1)$, $A_2(0,1)$ и $A_2'(1,0)$, $E(1,1)$ и $E'(1,3)$. Составить формулы преобразования.

166. Найти проективное преобразование прямой, заданное двумя тройками точек A, B, C и A', B', C', если:

1) $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $A'(-1,2)$, $B'(2,1)$, $C'(-1,3)$;
2) $A(1,2)$, $B(-1,1)$, $C(2,3)$, $A'(0,1)$, $B'(1,1)$, $C'(1,0)$;
3) $A(-2,1)$, $B(1,1)$, $C(1,2)$, $A'(1,-1)$, $B'(3,5)$, $C'(1,-1)$;
4) $A(3,2)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $A'(1,0)$, $B'(3,-1)$, $C'(4,-1)$;
5) $A(-1,3)$, $B(2,1)$, $C(1,2)$, $A'(2,1)$, $B'(0,1)$, $C'(3,4)$;
6) $A(4,1)$, $B(1,1)$, $C(5,2)$, $A'(3,2)$, $B'(0,1)$, $C'(2,-1)$;
7) $A(-3,2)$, $B(1,2)$, $C(2,3)$, $A'(2,3)$, $B'(1,1)$, $C'(1,-1)$;
8) $A(2,5)$, $B(1,4)$, $C(3,-1)$, $A'(1,0)$, $B'(2,-1)$, $C'(1,1)$;
9) $A(4,3)$, $B(-1,1)$, $C(3,4)$, $A'(0,1)$, $B'(2,-1)$, $C'(5,3)$;
10) $A(1,1)$, $B(-2,3)$, $C(3,2)$, $A'(-1,2)$, $B'(3,2)$, $C'(1,2)$.

167. Найти неподвижные точки проективного преобразования прямой, заданного двумя тройками точек A, B, C и A', B', C':

1) $A(-1,2),\ B(-2,3),\ C(3,1),\quad A'(4,1),\ B'(1,0),\ C'(3,7)$;
2) $A(1,2),\ B(1,-2),\ C(2,1),\quad A'(0,1),\ B'(4,-7),\ C'(1,2)$;
3) $A(1,1),\ B(3,-1),\ C(-1,1),\quad A'(3,7),\ B'(1,9),\ C'(1,-1)$;
4) $A(0,1),\ B(2,1),\ C(4,-3),\quad A'(-5,1),\ B'(1,3),\ C'(27,1)$;
5) $A(3,2), B(1,4), C(0,1),\quad A'(5,3), B'(15,11), C'(4,3)$;
6) $A(1,1), B(2,-1), C(1,0),\quad A'(1,2), B'(5,1), C'(2,1)$;
7) $A(5,7), B(9,-2), C(4,-9),\quad A'(7,5), B'(-2,9), C'(-9,4)$;
8) $A(2,-1), B(1,3), C(4,5),\quad A'(1,3), B'(2,-1), C'(9,-1)$;

168. Найти все проективные преобразования, оставляющие неподвижными базисные точки $A_1,\ A_2$, и доказать, что множество всех таких преобразований образует группу.

169. Доказать, что следующие множества проективных преобразований прямой образуют группу:
1) $\rho x_1' = ax_1 - bx_2,\ \ \rho x_2' = bx_1 + ax_2,\ \ (a^2 + b^2 \neq 0)$;
2) $\rho x_1' = x_1 + kx_2,\ \rho x_2' = x_2$;
3) $\rho x_1' = x_1,\ \ \rho x_2' = kx_2$;
4) $\rho x_1' = ax_1,\ \ \rho x_2' = bx_2\ \ (a \neq 0,\ \ b \neq 0)$;
5) $\rho x_1' = ax_1,\ \ \rho x_2' = bx_1 + ax_2,\ \ (a \neq 0)$.

170. Проективное отображение $f:\ \ell \to \ell'$ задано тремя парами соответственных точек: $A,\ A' = f(A),\ B,\ B' = f(B),\ C,\ C' = f(C)$. Построить образ и прообраз точки $X = \ell \cap \ell'$.

171. Проективное преобразование f прямой ℓ задано двумя тройками точек: $A,\ B,\ C$ и $A' = f(A),\ B' = f(B), C' = f(C)$ и дана точка $M \in \ell$. Построить точку $M' = f(M)$.

172. Проективное отображение $f:\ (L) \to (L')$ пучков прямых задано двумя тройками прямых $a,\ b,\ c$ пучка (L) и $a' = f(a),\ b' = f(b),\ c' = f(c)$ пучка (L'). Построить:
а) образ $m' = f(m)$ любой прямой $m \in (L)$;
б) образ и прообраз прямой LL'.

173. Проективное преобразование f пучка прямых (L) задано двумя тройками прямых $a,\ b,\ c$ и $a' = f(a),\ b' = f(b),\ c' = f(c)$. Построить образ произвольной прямой m пучка.

174. На прямой ℓ даны две неподвижные точки X и Y проективного преобразования f и пара соответственных точек A и $A' = f(A)$. Построить образ произвольной точки M прямой ℓ.

175. В пучке прямых (L) даны двойные прямые x и y проективного преобразования пучка и пара соответственных прямых a и a'. Построить образ произвольной прямой m пучка.

Раздел 2

Основные факты проективной геометрии

2.1 Двойное (сложное) отношение

176. Убедившись, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой, найти двойное отношение (AB, CD) в каждом из следующих случаев:

а) $A(1,1,2)$, $B(3,-1,2)$, $C(11,-1,10)$, $D(3,4,7)$;
б) $A(0,-2,3)$, $B(1,1,-5)$, $C(1,-3,1)$, $D(-2,12,-11)$;
в) $A(-3,5,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(-1,7,16)$, $D(3,-1,12)$;
г) $A(1,2,0)$, $B(-1,0,1)$, $C(1,4,1)$, $D(0,2,1)$;
д) $A(3,1,2)$, $B(1,1,-2)$, $C(5,3,-2)$, $D(1,-1,6)$;
е) $A(-2,0,3)$, $B(1,4,1)$, $C(3,4,-2)$, $D(7,4,-8)$;
ж) $A(1,2,0)$, $B(-1,0,1)$, $C(-1,4,3)$, $D(4,2,-3)$;
з) $A(-1,5,3)$, $B(3,-2,-1)$, $C(9,7,5)$, $D(12,5,4)$.

177. Проверив, что прямые a, b, c, d принадлежат одному пучку прямых, найти двойное отношение (ab, cd) в каждом из следующих случаев:

а) $a(0,0,1)$, $b(-2,1,3)$, $c(6,-3,-7)$, $d(2,-1,-2)$;
б) $a(3,1,4)$, $b(-1,0,2)$, $c(11,2,-2)$, $d(11,5,28)$;
в) $a(-2,1,3)$, $b(5,-1,-7)$, $c(3,0,-4)$, $d(-9,3,13)$;
г) $a(-4,1,2)$, $b(2,1,3)$, $c(0,3,8)$, $d(8,1,4)$;

д) $a(2,2,3)$, $b(0,2,1)$, $c(1,0,1)$, $d(5,-2,4)$;
е) $a(0,1,-1)$, $b(3,2,0)$, $c(6,7,-3)$, $d(-3,1,-3)$;
ж) $a(5,1,0)$, $b(1,-2,1)$, $c(7,8,-3)$, $d(2,7,-3)$;
з) $a(2,3,-1)$, $b(1,3,0)$, $c(0,3,1)$, $d(-2,3,3)$.

178. Убедившись, что точки $A(1,-2,-1)$, $B(1,0,-2)$, $C(-3,-4,8)$ лежат на одной прямой, найти координаты точки D, лежащей на той же прямой и такой, что двойное отношение (AB,CD) равно: 1) $-\frac{5}{6}$, 2) -3, 3) -1, 4) $\frac{1}{2}$, 5) 2, 6) $-\frac{1}{3}$, 7) $\frac{4}{3}$, 8) $\frac{2}{3}$, 9) $\frac{3}{4}$, 10) 4.

179. Даны три точки $A(1,2,3)$, $B(-3,2,4), C(-2,4,7)$. Доказать, что они лежат на одной прямой и найти такую точку D, что $(AB,CD)=-1$.

180. Даны три прямые $a(1,2,1)$, $b(3,-1,2)$, $c(5,3,4)$. Доказать, что они принадлежат одному пучку и найти в пучке четвертую прямую d, если известно, что $(ab,cd)=-1$.

181. Проверив, что прямые $a(2,1,0)$, $b(0,1,3)$, $c(2,0,-3)$ пересекаются в одной точке, найти прямую d, такую, что двойное отношение (ab,cd) равно: 1) $\frac{1}{3}$, 2) $\frac{2}{3}$, 3) -3, 4) $\frac{3}{4}$, 5) $\frac{1}{2}$, 6) $-\frac{4}{3}$, 7) $\frac{5}{2}$, 8) 2, 9) $\frac{1}{4}$, 10) $-\frac{2}{5}$.

182. На проективной плоскости даны прямые a, b, c, d своими уравнениями соответственно:
1) $x_1+2x_2=0$, $x_1-x_3=0$, $x_1+4x_2+x_3=0$, $2x_2+x_3=0$;
2) $3x_1+x_2+2x_3=0$, $x_1+x_2-2x_3=0$, $5x_1+3x_2-2x_3=0$, $x_1-x_2+6x_3=0$;
3) $2x_1-3x_3=0$, $x_1+4x_2+x_3=0$, $3x_1+4x_2-2x_3=0$, $7x_1+4x_2-8x_3=0$;
4) $x_1+2x_2=0$, $x_1-x_3=0$, $x_1-4x_2-3x_3=0$, $4x_1+2x_2-3x_3=0$;
5) $x_1-5x_2-3x_3=0$, $3x_1-2x_2-x_3=0$, $9x_1+7x_2+5x_3=0$, $12x_1+5x_2+4x_3=0$;
6) $4x_1-x_2-2x_3=0, 2x_1+x_2+3x_3=0, 3x_2+8x_3=0, 8x_1+x_2+4x_3=0$;
7) $2x_1+2x_2+3x_3=0$, $2x_2+x_3=0$, $x_1+x_3=0$, $5x_1-2x_2+4x_3=0$;
8) $x_2-x_3=0$, $3x_1+2x_2=0$, $6x_1+7x_2-3x_3=0$, $3x_1-x_2+3x_3=0$;
9) $5x_1+x_2=0, x_1-2x_2+x_3=0, 7x_1+8x_2-3x_3=0, 2x_1+7x_2-3x_3=0$;
10) $2x_1+3x_2-x_3=0$, $x_1+3x_2=0$, $3x_2+x_3=0$, $2x_1-3x_2-3x_3=0$.

Доказать, что они принадлежат одному пучку и найти двойное отношение (ab,cd).

183. Доказать, что прямые a, b, c, заданные соответственно уравнениями: $x_1-2x_3=0$, $3x_1-x_2+4x_3=0$, $5x_1-x_2=0$, проходят через одну точку L. Найти прямую d, такую, что $(ab, cd) = -2$.

184. Показать, что точки $A(1,4,1)$, $B(0,1,1)$, $C(2,3,-3)$ лежат на одной прямой и найти на этой прямой такую точку D, что $(AB, CD) = -4$.

185. На проективной плоскости даны четыре точки A,B, C, D. Найти двойное отношение (AB, CD), если:

а) $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(1,4)$, $D(3,5)$;
б) $A(3,1)$, $B(2,5)$, $C(1,0)$, $D(-2,1)$;
в) $A(1,3)$, $B(5,-2)$, $C(1,-1)$, $D(2,3)$;
г) $A(-1,1)$, $B(2,3)$, $C(7,11)$, $D(1,4)$;
д) $A(5,7)$, $B(2,3)$, $C(3,4)$, $D(-1,1)$;
е) $A(-4,3)$, $B(3,2)$, $C(-1,5)$, $D(2,1)$;
ж) $A(-2,3)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$, $D(3,-5)$;
з) $A(2,5)$, $B(-3,5)$, $C(1,15)$, $D(1,0)$;
и) $A(1,0)$, $B(7,-3)$, $C(0,1)$, $D(1,-1)$.

186. Приняв точки $A(2,1)$, $B(-1,3)$ проективной прямой за базисные, а точку $C(4,5)$ той же прямой за единичную точку, найти проективные координаты точки $D(-8,3)$.

187. На расширенной прямой даны четыре точки: $A(1,3)$, $B(2,1)$, $C(-1,4)$, $D(3,-1)$. Найти двойное отношение (AB, CD) и проективные координаты точки D относительно проективного репера $R = \{A, B, C\}$. Построить точку D.

188. На проективной прямой даны три точки $A(1,2)$, $B(-1, 1)$, $C(3,5)$ с координатами относительно репера $R = \{A_1, A_2, E\}$. Кроме того, дано $(AB, CD) = \frac{1}{2}$. Найти проективные координаты точки D относительно репера R.

189. Выбрав на расширенной прямой две произвольные различные точки $A(1,-1)$ и $B(2,1)$ и приписав несобственной точке D этой прямой координаты $(6,1)$, построить точку $C(1,2)$.

190. В декартовой системе координат на прямой даны точки: $A(-2)$, $B(3)$, $C(-1)$. Найти проективные координаты точек: $D(5)$, $F(-7)$, $G(4)$, $H(2)$, $O(0)$, $E(1)$ относительно проективного репера $R = \{A, B, C\}$.

191. В евклидовой плоскости даны четыре прямые a, b, c, d пучка со своими уравнениями. Найти двойное отношение в каждом из следующих случаев:

а) $y = x,\ y = 2x,\ y = 3x,\ y = -x;$
б) $y = x - 3,\ y = 2x - 3,\ y = -x - 3,\ y = 5x - 3;$
в) $y = 3x,\ y = -x,\ y = 0, x = 0;$
г) $2x - y + 7 = 0,\ x + y + 2 = 0,\ 6x + 5y + 13 = 0,$
$x - 3y + 6 = 0;$
д) $y - 3 = -(x + 2),\ y - 3 = x + 2,\ y - 3 = 3(x + 2),$
$y - 3 = 5(x + 2).$

192. На евклидовой плоскости даны четыре точки A, B, C, D, лежащие на прямой a, и A_1, B_1, C_1, D_1 - соответственно их параллельные проекции на некоторую прямую a_1. Доказать, что $(AB, CD) = (A_1B_1, C_1D_1)$.

193. На проективной прямой даны четыре точки A, B, C, D. Вычислить значения двойного отношения этих точек, соответствующие всевозможным их перестановкам, если:
а) $A(2, -3),\ B(3, -1),\ C(4, 1),\ D(5, 3);$
б) $A(1, -1),\ B(2, 1),\ C(0, 1),\ D(1, 5);$
в) $A(5, 7),\ B(3, 4),\ C(2, 3),\ D(0, 1);$
г) $A(4, -3),\ B(1, 5),\ C(-5, 9),\ D(13, -4);$
д) $A(3, 1),\ B(4, -7),\ C(2, 9),\ D(7, -6).$

194. На проективной прямой заданы три точки A, B, C. Найти на этой прямой точку $D(x_1, x_2)$, если:
а) $A(-3, 1)$, $B(2, 11)$, $C(1, 9)$, $(AB, CD) = -2;$
б) $A(-4, 0)$, $B(0, 8)$, $C(1, 10)$, $(AB, CD) = 3;$
в) $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(5, 3)$, $(AB, CD) = \dfrac{2}{3};$
г) $A(0, 5)$, $B(1, 7)$, $C(-2, 1)$, $(AB, CD) = \dfrac{5}{2};$
д) $A(4, 1)$, $B(-5, 4)$, $C(-2, 3)$, $(AB, CD) = \dfrac{1}{2}.$

195. На евклидовой прямой даны четыре точки A, B, C, D. Вычислить значения двойного отношения этих точек, соответствующие всевозможным их перестановкам, если:
а) $A(3),\ B(8),\ C(7),\ D(13);$
б) $A(-1),\ B(2),\ C(-3),\ D(4);$
в) $A(5),\ B(-3),\ C(4),\ D(7);$
г) $A(2),\ B(0),\ C(5),\ D(6);$
д) $A(4),\ B(-2),\ C(9),\ D(8).$

196. Даны четыре точки прямой A, B, C, D, следующие на равных расстояниях одна за другой. Вычислить все значения, которые может иметь двойное отношение этих четырех точек.

197. Доказать: $(AB, CD_\infty) = (AB, C)$.

198. Доказать, что если точки A, B, C, D коллинеарны, то $(AB, CD) + (AC, DB) + (AD, BC) = 0$.

199. На евклидовой плоскости даны четыре прямые одного пучка a, b, c, d. Доказать:

$$(ab, cd) = \frac{\sin\angle(a, c)}{\sin\angle(b, c)} : \frac{\sin\angle(a, d)}{\sin\angle(b, d)}.$$

2.2 Гармонические четверки точек и прямых. Гармонические свойства четырехвершинников и четырехсторонников

200. На евклидовой прямой даны три точки A, B, C. Пользуясь одной линейкой, построить четвертую гармоническую точку D.

201. Даны три прямые a, b, c пучка (L). Пользуясь одной линейкой, построить четвертую гармоническую прямую d.

202. В евклидовой плоскости даны три параллельные прямые a, b, c. Рассматривая a, b, c как прямые пучка прямых с несобственным центром, построить четвертую гармоническую прямую d, пользуясь одной линейкой.

203. Даны три точки A, B, C, лежащие на евклидовой прямой ℓ, и точка D - четвертая гармоническая к ним. Доказать, что D является несобственной точкой прямой ℓ тогда и только тогда, когда C - середина отрезка AB.

204. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и BE внутреннего и внешнего углов при вершине B. Точки D и E есть точки пересечения этих биссектрис с прямой AC. Доказать, что $(AC, DE) = -1$.

205. В евклидовой плоскости даны три прямые a, b, c одного пучка прямых. Какая прямая будет четвертой гармонической к ним, если прямая c делит пополам пару вертикальных углов, образованных прямыми a и b.

206. Доказать, что прямая, соединяющая точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции с точкой пересечения диагоналей, делит основания трапеции пополам.

207. Доказать, что если в треугольнике ABC прямая ℓ, параллельная стороне BC, пересекает сторону AB в точке B' и сторону AC в точке C', то прямая, соединяющая точку A с точкой $D = B'C \cap C'B$, делит пополам сторону BC.

208. Доказать, что через каждую вершину полного четырехсторонника проходит гармоническая четверка прямых. Она состоит из двух сторон, диагонали и прямой, соединяющей эту вершину с диагональной точкой, через которую проходят две другие диагонали.

209. Доказать, что через каждую диагональную точку полного четырехсторонника проходит гармоническая четверка прямых. Она состоит из двух диагоналей и двух прямых, соединяющих эту диагональную точку с парой противоположных вершин.

210. На евклидовой плоскости дан треугольник ABC. Доказать, что четвертой гармонической к двум сторонам CA, CB треугольника и к прямой CM, где M - середина стороны AB, является прямая CX, параллельная прямой AB.

211. На евклидовой плоскости дан параллелограмм $ABCD$ и через точку $O = AC \cap BD$ проведены прямые ℓ и m, $\ell || AB$, $m || BC$. Доказать, что прямые AC, BD, ℓ, m образуют гармоническую четверку прямых.

212. Даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB. Пользуясь линейкой, разделить отрезок AB пополам.

213. Дан отрезок AB с отмеченной серединой C. Через данную точку P провести прямую, параллельную прямой AB.

214. Через точку пересечения прямых a и b проведена прямая c, перпендикулярная к прямой b. Пользуясь одной линейкой, удвоить угол, образованный прямыми a и b.

215. Дан параллелограмм $ABCD$. Пользуясь одной линейкой, через точку пересечения его диагоналей провести прямые, параллельные его сторонам.

216. Дан параллелограмм $ABCD$. Пользуясь одной линейкой, разделить его стороны пополам.

217. Даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB. Пользуясь одной линейкой, построить отрезки, равные $3AB$, $4AB$, $5AB$.

218. Дано: $a||b$, отрезок $AB \subset a$. Пользуясь одной линейкой, разделить отрезок AB на 3, 4, 5 равных частей.

219. Даны две различные параллельные прямые и точка, не лежащая на них. Пользуясь одной линейкой, через эту точку провести прямую, параллельную данным прямым.

220. Дан отрезок AB, его середина C и точка M прямой AB. Построить с помощью одной линейки такую точку X прямой AB, что $MX = AB$.

221. Дан треугольник, его средняя линия и прямая ℓ. Построить, пользуясь одной линейкой, прямую, проходящую через данную точку P и параллельную прямой ℓ.

2.3 Проективная классификация линий второго порядка

222. На проективной плоскости дан проективный репер $R = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ E\}$. Найти общий вид уравнения линии второго порядка, проходящей через все четыре координатные точки.

223. Определить, к какому типу принадлежит каждая из следующих линий второго порядка:

а) $4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$;

б) $2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;

в) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$;

г) $5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = 0$;

д) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$;

е) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$.

224. Найти точки пересечения линии второго порядка $2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$ с прямыми:

а) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$;

б) $x_1 = 5\lambda - \mu,\ x_2 = -3\mu,\ x_3 = -2\lambda + \mu$;

в) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$;

г) $x_1 = \lambda + \mu,\ x_2 = \lambda - \mu,\ x_3 = 2\mu$.

225. Найти уравнение касательной к линии $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ в точке $A(1, 2, -1)$.

226. Найти уравнение касательной к линии $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ в точке $A(1, 1, -1)$.

227. Найти уравнения касательных, проведенных из точки $A(3, -2, 2)$ к линии, заданной уравнением $3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.

228. Линия второго порядка имеет уравнение $x_1x_2 + x_2x_3 +$

$x_1x_3 = 0$. Как расположен относительно нее базисный треугольник $A_1A_2A_3$? Показать, что прямая, которая соединяет точку A_1 с точкой пересечения касательных к линии в точках A_2 и A_3, проходит через единичную точку $E(1,1,1)$ и что аналогичное справедливо также и для точек A_2 и A_3.

2.4 Полюсы и поляры линии второго порядка

229. Дана линия второго порядка $2x_1^2+x_2^2-2x_3^2-6x_1x_2+4x_2x_3 = 0$. а) написать уравнение поляры следующих точек: A_1 (1, 0, 0), $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$, $E(1,1,1)$, $M(2,-1,5)$; б) найти координаты полюса прямой $7x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 0$ относительно данной линии.

230. Найти поляру точки относительно линии второго порядка в каждом из следующих случаев:

точка	*линия второго порядка*
а) $(-4,2,1)$	$6x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 5x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0;$
б) $(6,4,-1)$	$2x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0;$
в) $(2,1,1)$	$4x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 = 0;$
г) $(1,0,1)$	$3x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0.$

231. Найти полюс прямой относительно линии второго порядка в каждом из следующих случаев:

прямая	*линия второго порядка*
а) $3x_1 - x_2 + 6x_3 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0;$
б) $x_1 - 3x_3 = 0$	$2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3+$ $+6x_2x_3 = 0;$
в) $x_2 = 0$	$4x_1^2 + 15x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3 = 0;$
г) $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$	$3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 7x_1x_2 + 4x_1x_3+$ $5x_2x_3 = 0.$

232. Доказать, что собственные точки линии второго порядка на расширенной плоскости составляют обычную линию второго порядка на евклидовой плоскости.

233. Через внутреннюю точку P данной окружности проведена хорда AB и построены касательные в точках A и B, пересекающиеся в точке C. Доказать, что двойное отношение $(CP, KM) = -1$, где M и K - точки пересечения прямой CP с окружностью.

234. Доказать, что если точки P и P' инверсны относительно данной окружности и диаметр AB коллинеарен с точками P и P', то двойное отношение $(AB, PP') = -1$.

235. На евклидовой плоскости дана окружность и точка P вне ее. Из точки P проведены касательные PA_1, PA_2 к окружности и секущая ℓ, пересекающая окружность в точках M и N и хорду A_1A_2 в точке Q. Доказать, что $(PQ, MN) = -1$.

236. Прямая ℓ не имеет общих точек с данной окружностью. Прямая, соединяющая точки касания касательных, проведенных из точки $A \in \ell$ к окружности, пересекает прямую ℓ в точке B. Доказать, что прямая, соединяющая точки касания касательных, проведенных из точки B к окружности, проходит через точку A.

237. На евклидовой плоскости дана окружность и проведена хорда AB, точка P - ее середина. Доказать, что поляра точки P параллельна прямой AB.

238. Точка A - внутренняя относительно окружности с центром O $(A \neq O)$. Через точку A проведены всевозможные хорды. Доказать, что точки пересечения касательных к окружности в концах каждой хорды лежат на одной прямой, перпендикулярной к прямой AO.

239. Точка A - внешняя относительно окружности с центром O. Через точку A проведены всевозможные секущие к окружности, отличные от прямой AO. Доказать, что точки пересечения касательных к окружности в точках ее пересечения с каждой секущей лежат на одной прямой, перпендикулярной к прямой AO.

240. В окружности проведены параллельные хорды и в их концах - касательные к окружности. Доказать, что точки пересечения касательных в концах каждой из хорд лежат на одной прямой, перпендикулярной этим хордам и проходящей через центр окружности.

241. Прямая ℓ не имеет общих точек с окружностью. Доказать, что прямые, соединяющие точки касания касательных, проведенных из любой точки $M \in \ell$ к окружности, проходят через одну и ту же точку.

242. Дана овальная линия второго порядка и точка M. Построить поляру точки M, если:

а) M - внешняя точка;

б) M - внутренняя точка;

в) M - лежит на линии.

243. Построить полюс данной прямой ℓ относительно данной овальной линии второго порядка.

244. Из внешней точки P провести касательные к данной окружности, пользуясь одной линейкой.

245. В евклидовой плоскости дана линия второго порядка и точка P внутри ее. Построить хорду, делящуюся в точке P пополам.

246. Треугольник называется *автополярным*, если каждая его сторона есть поляра противоположной вершины. Дана овальная линия второго порядка, вершина P и проходящая через нее сторона q автополярного треугольника PQR. Построить этот треугольник.

2.5 Конструктивные теоремы теории линий второго порядка

В задачах 247 - 268 выполнить построения, пользуясь одной линейкой.

247. Овальная линия второго порядка задана пятью своими точками. Построить какую-либо шестую точку линии.

248. Овальная линия второго порядка задана пятью своими точками. Построить касательную в одной из данных точек.

249. Овальная линия второго порядка задана пятью своими точками и дана прямая, проходящая через одну из данных точек. Построить точку пересечения данной прямой с линией.

250. Даны четыре точки линии второго порядка и касательная в одной из них. Построить еще несколько точек линии.

251. Овальная линия второго порядка задана четырьмя точками и касательной в одной из них. Через одну из данных точек проведена прямая. Построить точку пересечения данной прямой с линией.

252. Даны четыре точки линии второго порядка и касательная в одной из них. Построить касательную в одной из данных точек.

253. Овальная линия второго порядка задана тремя своими точками и касательными в двух из них. Построить касательную в третьей точке.

254. Овальная линия второго порядка задана тремя своими точками и касательными в двух из них. Построить еще одну точку кривой.

255. Дана овальная линия второго порядка и на ней точка A. Построить касательную к линии в точке A.

256. Даны две вершины треугольника, вписанного в линию второго порядка, касательные к линии в этих вершинах и прямая Паскаля. Построить третью вершину.

257. Даны три вершины четырехугольника, вписанного в линию второго порядка, касательная в одной из них и прямая Паскаля. Построить четвертую вершину и касательную в ней.

258. Овальная линия второго порядка задана пятью касательными к ней. Построить еще одну касательную.

259. Овальная линия второго порядка задана пятью касательными к ней. Построить какую-либо точку данной линии.

260. Овальная линия второго порядка задана четырьмя касательными и точкой касания в одной из них. Построить еще одну касательную.

261. Овальная линия второго порядка задана четырьмя касательными и точкой касания в одной из них. Построить еще одну точку данной линии.

262. Овальная линия второго порядка задана тремя касательными и точками касания двух из них. Построить еще одну касательную.

263. Овальная линия второго порядка задана тремя касательными и точками касания двух из них. Построить еще одну точку данной линии.

264. Даны пять касательных к линии второго порядка и дана точка M на одной из них. Построить еще одну касательную к линии, проходящую через точку M.

265. Даны четыре касательных к линии второго порядка и точка касания на одной из них. Через данную точку M на другой касательной провести еще одну касательную к линии.

266. Даны три стороны четырехсторонника, описанного около линии второго порядка, точка касания одной из них и точка Брианшона. Построить четвертую сторону и ее точку касания.

267. Даны две стороны трехсторонника, описанного около линии второго порядка, точки касания этих сторон и точка Брианшона. Построить третью сторону.

268. Построить точки пересечения овальной линии второго порядка, заданной пятью точками, с данной прямой.

2.6 Линии второго порядка в евклидовой плоскости

В расширенной евклидовой плоскости:

эллипс представляет собой линию второго порядка, не имеющую общих точек с несобственной прямой;

парабола представляет собой линию второго порядка, касающуюся несобственной прямой, и, наконец

гипербола - линию второго порядка, пересекающую несобственную прямую в двух точках.

Полюс несобственной прямой относительно линии второго порядка является *центром* линии; поляра несобственной точки - *диаметром* линии.

Парабола не имеет центра, так как касается несобственной прямой и точка касания является полюсом несобственной прямой. По теореме взаимности все диаметры параболы (поляры несобственных точек) проходят через точку касания несобственной прямой и параболы. Следовательно, на евклидовой плоскости диаметры параболы параллельны между собой.

Касательные в точках пересечения гиперболы с несобственной прямой являются ее *асимптотами*.

Такое определение эллипса, параболы, гиперболы, их центров, асимптот, диаметров позволяет использовать в евклидовой плоскости проективные теоремы и проективные понятия при решении ряда задач, связанных с линиями второго порядка.

269. Доказать, что парабола вполне определяется:
а) осью, вершиной и точкой;
б) диаметром, касательной в точке пересечения диаметра с параболой и точкой;
в) диаметром и тремя точками;
г) диаметром, двумя точками и касательной в одной из них.

270. Доказать, что гипербола вполне определяется:
а) асимптотами и точкой (или касательной);
б) асимптотой и тремя точками (или тремя касательными);
в) двумя асимптотическими направлениями и тремя точками.

271. Дан параллелограмм $ABCD$. Из данной точки M, принадлежащей AB, провести касательную к эллипсу, вписанному в параллелограмм $ABCD$ и касающемуся его сторон в их серединах (изображение эллипса не дано).

272. Дан параллелограмм $ABCD$. Через середину отрезка AB проведена прямая. Найти точки пересечения этой прямой с эллипсом, вписанным в параллелограмм $ABCD$ и касающимся его сторон в их серединах (изображение эллипса не дано).

273. Прямые AB и CD - сопряженные диаметры эллипса, точки A, B, C, D лежат на эллипсе. Построить еще одну точку эллипса (изображение эллипса не дано).

274. Прямые AB и CD - сопряженные диаметры эллипса, точки A, B, C, D лежат на эллипсе. Построить касательную к эллипсу в найденной точке (изображение эллипса не дано).

275. Даны две асимптоты и одна из точек гиперболы. Построить еще одну точку гиперболы и касательную в этой точке.

276. Дана одна асимптота и три различные точки гиперболы. Построить еще одну точку гиперболы и касательную в этой точке.

277. Дана одна асимптота и три различные точки гиперболы. Построить какую-либо прямую второго асимптотического направления.

278. Дана одна асимптота и три различные точки гиперболы. Построить вторую асимптоту.

279. Даны асимптота гиперболы, точка гиперболы, касательная в этой точке и прямая, параллельная второй асимптоте. Построить вторую асимптоту.

280. Даны две различные точки гиперболы, касательная в одной из них и две прямые, параллельные асимптотам. Построить асимптоты гиперболы.

281. Дана одна асимптота гиперболы, две ее точки и касательная в одной из них. Построить еще одну точку гиперболы и касательную в ней.

282. Даны четыре различные точки гиперболы и прямая одного асимптотического направления. Построить асимптоту этого направления.

283. Даны четыре различные точки гиперболы и прямая одного асимптотического направления. Построить точку пересечения данной прямой с гиперболой.

284. Даны четыре различные точки гиперболы и прямая одного асимптотического направления. Построить прямую второго асимптотического направления.

285. Даны четыре различные точки гиперболы и прямая одного асимптотического направления. Построить касательную в одной из данных точек.

286. Даны три различные точки гиперболы, касательная в одной из них и прямая асимптотического направления. Найти точку пересечения этой прямой с гиперболой.

287. Гипербола задана двумя асимптотическими направлениями и тремя точками. Построить касательную в одной из данных точек.

288. Гипербола задана двумя асимптотическими направлениями и тремя точками. Построить какую-либо четвертую точку гиперболы.

289. Даны следующие точки и прямые, определяющие гиперболу: асимптота, прямая ℓ, параллельная другой асимптоте; точка гиперболы и касательная в этой точке. Построить точку пересечения прямой ℓ с гиперболой.

290. Даны асимптота гиперболы и три ее касательные. Построить еще одну касательную и точку ее касания.

291. Даны асимптоты гиперболы и одна из ее касательных. Построить точку ее касания.

292. Даны асимптоты гиперболы и одна из ее касательных. Построить еще одну касательную.

293. Даны три точки гиперболы и две прямые, имеющие асимптотические направления. Построить центр гиперболы.

294. Даны центр гиперболы, ее асимптота, точка и касательная к гиперболе в этой точке. Построить вторую асимптоту гиперболы.

295. Парабола задана осью ℓ, вершиной M и точкой N. Построить касательную в точке N.

296. Парабола задана осью ℓ, вершиной M и точкой N. Построить какую-либо точку, отличную от N.

297. Доказать, что никакие две касательные параболы не параллельны.

298. Даны четыре касательных к параболе. Построить точку этой параболы.

299. Парабола задана осью l, вершиной M и точкой N. Построить еще одну касательную к параболе.

300. Даны три точки параболы и ее диаметр. Построить еще одну точку параболы и касательную к параболе в этой точке.

301. Даны четыре касательных к параболе. Построить точку этой параболы.

302. Даны четыре касательных к параболе. Построить еще одну касательную к параболе.

303. Даны три точки параболы и ее диаметр. Построить еще одну точку параболы и касательную к параболе в этой точке.

304. Даны диаметр параболы и три ее точки. Построить еще одну точку параболы.

305. Даны диаметр параболы и три ее точки. Построить касательную в одной из данных точек.

306. Даны диаметр параболы и три ее точки. Построить точку пересечения данного диаметра с параболой.

307. Даны диаметр параболы, касательная в точке пересечения этого диаметра с параболой и точка параболы. Построить несколько точек параболы.

308. Даны диаметр, две точки параболы и касательная в одной из них. Построить касательную в другой точке и еще одну точку параболы.

309. Даны две точки параболы и касательные в этих точках. Построить диаметр, проходящий через точку пересечения данных касательных.

310. Даны четыре различные касательные параболы. Построить точку касания одной из них.

311. Даны четыре различные касательные параболы. Построить какой-либо ее диаметр.

312. Даны диаметр параболы и три ее касательные. Построить точку касания одной из них.

313. Даны диаметр параболы и три ее касательные. Построить еще одну касательную.

314. Даны две точки параболы и касательные в этих точках. Построить какой-либо диаметр параболы.

315. Дана окружность и на ней точка A. Провести касательную к окружности в точке A, пользуясь одной линейкой.

Указание: рассмотреть вписанный в окружность пятиугольник и применить теорему Паскаля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.II. М.: Просвещение, 1987.

2. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. Геометрия. Ч.II. М.: Просвещение, 1976.

3. Атанасян Л.С. и др. Сборник задач по геометрии. Ч.II. М.: Просвещение, 1975.

4. Атанасян Л.С. и др. Сборник задач по элементарной геометрии. М.: Просвещение, 1964.

5. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Ч.II. М.: Просвещение, 1975.

6. Базылев В.Т. и др. Сборник задач по геометрии. М.: Просвещение, 1980.

7. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1964

8. Гуревич Г.Б. Проективная геометрия. М.: Физматгиз, 1960.

9. Комиссарук А.М. Проективная геометрия в задачах. Минск: Высшая школа, 1971.

10. Львова Л.В. Проективная геометрия. Барнаул.: Барнаульский гос. пед. университет, 1996.

11. Певзнер С.Л. Проективная геометрия. М.: Просвещение, 1980.

12. Сборник задач по конструктивной геометрии и проективным преобразованиям. Новосибирск.: Новосибирский гос. пед. институт, 1980.

13. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.- Мир, 1970.

Оглавление

Львова Людмила Викторовна

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Ответственный за выпуск - Л.В. Скорлупина

Подписано к печати 12.09.2010	Формат 60х84/16	Тираж 300 экз.
Объем 8 п.л.	Заказ №	Цена договорная

Отпечатано в типографии Некомерческого партнерства "Азбука"
г. Барнаул, пр. Красноармейский, 98^a, тел. 62-91-03