Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«АЛТАЙСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие
для студентов физических факультетов
педагогических вузов

Издание 2-е, исправленное и дополненное

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования Министерства образования и науки РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 Физико-математическое образование

Барнаул 2010

УДК 512.64(075)

ББК 22.143я73

К 562

А. А. Коваленко Основы линейной алгебры: *Учебное пособие.* – Издание 2-е, исправленное и дополненное. - Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2010. - 118 с.

Рецензенты:

Плотников В.А. - доктор физ.-мат. наук, профессор

(Алтайский государственный университет)

Ефремов Ю.С. - кандидат физ.-мат. наук, профессор

(Алтайская государственная педагогическая академия)

Учебное пособие, в котором изложен необходимый минимум теоретических сведений по предмету, написано в соответствии с требованиями государственного стандарта для специальностей 050203 (Физика) и 050203.65 (Физика с дополнительной специальностью). Излагаемый материал предназначен для студентов-первокурсников и является составной частью курса “Аналитическая геометрия и линейная алгебра”, в связи с чем в пособии рассматриваются только вещественные линейные пространства над полем действительных чисел. Предполагается, что необходимые обобщения для комплексных чисел будут сделаны при изучении тех дисциплин (например, квантовой механики), где соответствующая теория находит своё непосредственное практическое применение.

Основное назначение настоящего пособия – помочь в усвоении ряда абстрактных понятий линейной алгебры и на простых конкретных примерах показать возможности ее аппарата. Изложение основных методов сопровождается достаточно подробным рассмотрением типовых задач и примеров.

Для удобства пользования пособием в тексте используются следующие обозначения:

- - определения, правила;

Ø - теоремы;

v - примеры.

Подзаголовки параграфов выделены жирным шрифтом, а замечания - курсивом. Независимо от номера параграфа приведенные примеры и формулы имеют сквозную нумерацию. В конце каждого параграфа приводятся вопросы и задания для самоконтроля.

ISBN 978-5-88210-534-0

ВВЕДЕНИЕ

В математике часто приходится встречаться с объектами, над которыми производятся так называемые линейные операции: сложение, вычитание и умножение на число. Примерами таких объектов могут служить геометрические векторы (направленные отрезки) на плоскости или в пространстве, множество всех непрерывных функций, заданных на данном интервале [a,b] и т.д. Изучению множеств таких объектов и операций над ними посвящён раздел математики, который получил название линейной алгебры. Особое значение этого материала для физики объясняется тем, что большинство физических законов (второй закон Ньютона, закон Ома и др.) линейны относительно входящих в них величин, а сами эти физические величины (например, сила, напряженность поля, потенциал и т.д.) аддитивны.

§1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Из школьного курса алгебры известно понятие системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a\ x + b_2 y = c_2 \end{cases}$, где используются следующие обозначения: x, y - неизвестные; a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты при неизвестных; c_1 и c_2 – свободные члены уравнений.

- Любая пара чисел x, y, одновременно обращающая в тождество оба уравнения системы, называется её решением.
- Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной.
- Система уравнений, не имеющая ни одного решения, называется несовместной.

Разумеется, неизвестные можно обозначить другими буквами (например, u и v), решение системы при заданных коэффициентах и свободных членах от этого не изменится.

Условимся все неизвестные обозначать одной и той же латинской буквой x, а для отличия их друг от друга снабжать нижним индексом, имеющим смысл номера неизвестного. Аналогично все коэффициенты при неизвестных будем обозначать латинской буквой a, но уже с двумя индексами, первый из которых обозначает номер уравнения системы, а второй – номер неизвестного, при котором стоит данный коэффициент. Тогда обозначение a_{21}, например, будет говорить о том, что данный коэффициент относится к 1-му неизвестному во втором уравнении. Для обозначения свободных членов сохраним прежний символ c, индекс которого будет указывать на номер уравнения системы. Тогда, обозначая через x_k неизвестные, через a_{ik} коэффициенты при неизвестных, а через c_i свободные члены, систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases} \qquad (1).$$

Поскольку в левой части равенств присутствуют суммы однородных слагаемых с разными индексами, для сокращения записи часто используют математический символ суммирования – знак Σ. Обсудим правила использования этого символа.

Если дана сумма n однородных слагаемых a_1, a_2, … a_n , то с помощью символа Σ её можно представить в форме $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Здесь Σ – знак суммы, а k - индекс суммирования (номер слагаемого в сумме), который может изменяться (пробегать значения) от 1 до n включительно.

Правила обращения со знаком Σ

Непосредственным вычислением легко проверить справедливость следующих утверждений (свойств суммы):

1. Значение суммы не зависит от обозначения индекса суммирования:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Утверждение станет очевидным, если записать правую и левую части равенства в развернутом виде.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак суммы Σ:

$$\sum_{i=1}^{n} a\, a_i = a \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

3. Если каждое слагаемое суммы представляет сумму двух слагаемых, то результат суммирования равен сумме двух сумм, в каждой из которых указанные слагаемые складываются отдельно:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \ .$$

Для доказательства достаточно записать левую часть равенства в развернутом виде и сгруппировать слагаемые a и b.

4. В двойной сумме можно менять местами знаки суммирования

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \ .$$

Наличие двух индексов суммирования i и k позволяет записать совокупность слагаемых в виде прямоугольной таблицы из n строк и m столбцов. Сумму всех элементов таблицы можно найти несколькими способами. В левой части равенства предполагается, что для этого сначала нужно вычислить сумму элементов каждой строки (т.е. при фиксированном значении первого индекса i выполнить суммирование по второму индексу k), а потом сложить полученные результаты. В правой части равенства предварительно вычисляется сумма элементов каждого столбца таблицы (т.е. выполняется суммирование по индексу k), а затем находят сумму всех столбцов. Но сумма элементов таблицы, очевидно, не зависит от способа её вычисления, чем и доказана справедливость свойства 4.

При использовании символа Σ система (1) может быть записана в виде

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{2} a_{1k}x_k = c_1\\ \sum_{k=1}^{2} a_{2k}x_k = c_2\end{cases}$$ или ещё короче: $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}x_k = c_i$, где i = 1, 2.

Указанный способ позволяет значительно сократить объем записи, если не требуется конкретных значений коэффициентов системы.

Для решения системы (1) используем метод исключения неизвестных. С целью исключения x_2 умножим первое уравнение системы на a_{22}, второе – на a_{12}, и вычтем из первого уравнения второе:

$$-\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2\end{cases}\begin{vmatrix}\cdot a_{22}\\ \cdot a_{12}\end{matrix}.$$

Группируя слагаемые с неизвестными x_1 и x_2, получим:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 + (a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12})x_2 = (c_1a_{22} - c_2a_{12}).$$

Т.к. коэффициент при x_2 равен нулю, то, если правая часть данного уравнения отлична от нуля, для вычисления x_1 получаем формулу

$$x_1 = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (2).$$

Для исключения неизвестного x_1 умножим первое уравнение системы на a_{21}, второе – на a_{11}, и вычтем из первого уравнения второе:

$$-\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot a_{21}\\ \cdot a_{11}\end{matrix}\right..$$

Выполняя очевидные преобразования, приходим к выводу, что в случае отличия от нуля выражения $(a_{11}a_{22} – a_{12}a_{21})$ неизвестное x_2 можно найти по формуле

$$x_2 = \frac{c_2a_{11} - c_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (3).$$

Выражения в числителях и знаменателях формул (2) и (3) имеют одинаковую структуру и называются определителями второго порядка.

<u>Определители второго порядка</u>

Сформулируем ряд определений.

- Выражение вида ($a_{11}a_{22}$ – $a_{12}a_{21}$) называется определителем или детерминантом второго порядка и обозначается в виде квадратной таблицы:

$$\Delta=\mathrm{Det}\,(a_{ik})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- Числа, входящие в эту таблицу, будем называть элементами определителя и обозначать в общем случае буквой с двумя индексами, например, a_{ik}, где первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца.
- Горизонтальные ряды элементов определителя будем называть строками, а вертикальные – столбцами.

Число строк и совпадающее с ним число столбцов называется порядком определителя, в силу чего в нашем случае имеем дело с определителем второго порядка.

- Элементы с совпадающими индексами образуют главную диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол определителя.
- Элементы с переставленными местами индексами образуют побочную диагональ, идущую из правого верхнего в левый нижний угол определителя
- Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

v *<u>Пример 1</u>*: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-12-5=-17$.

- Транспонированием определителя называется замена строк столбцами того же номера.

Операцию транспонирования принято обозначать верхним индексом Т, так что если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, то

$$\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

<u>Свойства определителей второго порядка</u>

1. При транспонировании величина определителя не меняется.

Это свойство позволяет констатировать равноправие строк и столбцов в том смысле, что любое утверждение, справедливое для строк, будет справедливо и для столбцов.

2. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак

3. Множитель, одинаковый для элементов какой-либо строки (столбца), можно вынести за знак определителя.

4. Если определитель содержит две одинаковых строки (столбца), то он равен нулю.

5. Для того, чтобы определитель второго порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были пропорциональны.

Доказательство первых четырех свойств легко осуществить методом непосредственного вычисления, последнее свойство докажем как теорему.

Ø **<u>Теорема:</u>** Для того, чтобы определитель второго порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были пропорциональны.

<u>Докажем необходимость:</u>

Пусть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$. Тогда $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$, откуда следует, что

$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ и $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$. Ч.т.д.

Докажем достаточность:

Пусть $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$. Тогда $a_{11} = ka_{21}$; $a_{12} = ka_{22}$, вследствие чего

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ на основании свойства 4, ч.т.д.

Формулы Крамера

Вернемся к формулам (2) и (3), дающим решение системы уравнений (1). Заметим, что обе они имеют смысл только в случае, если их знаменатели $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$. Знаменатели формул (2) и (3) одинаковы, каждый из них представляет собой определитель второго порядка и называется главным определителем системы (1).

- Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется главным определителем системы.

Легко заметить, что числители формул (2) и (3) также могут быть представлены в виде определителей:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}.$$

Эти определители получили название вспомогательных.

- Определитель, полученный из главного заменой соответствующего столбца свободными членами, называется вспомогательным определителем системы.

С учетом данных определений формулы (2) и (3) можно переписать в виде

$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}$ и $x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}$, либо в более общей форме: $x_k = \frac{\Delta_{xk}}{\Delta}$. Эти выражения называют формулами Крамера. Напомним, что они имеют смысл только в случае отличия главного определителя системы от нуля. При этом каждое неизвестное можно найти путем деления соответствующего вспомогательного определителя на главный определитель системы.

v *Пример 2*: Решить систему: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$.

Вычислим определители и, поскольку $\Delta \neq 0$, применим формулы Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -22; \quad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 17; \quad x_1 = -22; \quad x_2 = 17.$$

<u>Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными</u>

При решении системы (1) могут иметь место три случая:

1. Главный определитель системы Δ отличен от нуля. В этом случае система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера.
2. Главный определитель системы Δ равен нулю, но хотя бы один из вспомогательных Δ_{x1} либо Δ_{x2} отличен от нуля. В этом случае система несовместна, т.е. не имеет решения, вследствие невозможности деления на ноль.

Действительно, в такой ситуации одно (либо оба) из равенств вида $x_k \cdot \Delta = \Delta_{xk}$ становится невозможным.

3. Главный определитель системы Δ и оба вспомогательных равны нулю. В этом случае система совместна и имеет бесчисленно много решений, т.к. сводится к одному уравнению.

В самом деле, из условия $\Delta = \Delta_{x1} = \Delta_{x2} = 0$ на основании свойства №5 определителей второго порядка следует, что $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{c_1}{c_2} = l$, а это значит, что уравнения системы пропорциональны и первое из них может быть получено из второго умножением на некоторый коэффициент λ.

<u>Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными</u>

- Система уравнений называется однородной, если свободные члены во всех её уравнениях равны нулю.

Таким образом, наша система должна иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \quad (4).$$

Легко заметить, что однородная система (4) всегда совместна, т.к. набор $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ является её решением (такое решение называют нулевым или тривиальным). Однако, кроме тривиального, такая система, очевидно, должна иметь и ненулевые решения. Попробуем их найти.

Из коэффициентов системы можно составить три определителя, каждый из которых образован коэффициентами при двух неизвестных. Так, если отбросить коэффициенты при x_1, получим определитель $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$. Аналогично можно составить определители $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

и $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Пусть хотя бы один из определителей (например, Δ_3) отличен от нуля. Перепишем систему (4) в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3 \end{cases} \quad (5).$$

Если придать неизвестному x_3 произвольное фиксированное значение $x_3 = \text{Const}$, то систему (5) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2, главный определитель которой $\Delta = \Delta_3 \neq 0$. Так как $x_3 = \text{Const}$, то можно ввести новую постоянную $t = \dfrac{x_3}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$.

Тогда в силу отличия Δ от нуля для системы (5) получим единственное (при выбранном x_3) решение:

$$x_1=\frac{\Delta_{x1}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-a_{13}x_3 & a_{12}\\ -a_{23}x_3 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{x_3\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=t\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix};$$

$$x_2=\frac{\Delta_{x2}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{13}x_3\\ a_{21} & -a_{23}x_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{-x_3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=-t\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

Через эту же постоянную t можно выразить и неизвестное x_3, значение которого мы зафиксировали: $x_3=t\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$.

Можно показать, что те же формулы получим, если $\Delta_3 = 0$, но отличен от нуля определитель Δ_1 или Δ_2.

На основании выше изложенного можно сделать вывод:
если хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2 или Δ_3 однородной системы двух уравнений с тремя неизвестными отличен от нуля, то система имеет бесчисленно много решений вида $x_k=(-1)^{(k+1)}\cdot t\cdot\det(a_{ij})$ при $j \neq k$, где k - номер неизвестного, а t - произвольная постоянная.

Таким образом, для однородной системы двух уравнений с тремя неизвестными можно сформулировать следующие правила:

- Если хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2 или Δ_3 однородной системы двух уравнений с тремя неизвестными отличен от нуля, то неизвестное x_k равно произведению произвольного числа t на определитель, составленный из коэффициентов при двух других неизвестных. При этом определитель берётся со знаком плюс, если номер k нечётный, и со знаком минус, если номер k чётный.
- Если все определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3 однородной системы двух уравнений с тремя неизвестными равны нулю (в этом случае уравнения системы пропорциональны), то система сводится к одному урав-

нению и имеет бесчисленно много решений. Чтобы получить конкретное решение, нужно одновременно двум неизвестным придать какие-либо произвольные значения, а третье найти из уравнения.

v *Пример 4*: Решить систему $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Согласно сформулированному правилу имеем:

$$x_1 = t \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 19t; \qquad x_2 = -t \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7t; \qquad x_3 = t \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -17t.$$

Убедиться в правильности результата можно непосредственной подстановкой решения в оба уравнения системы.

Контрольные вопросы и задания:

1. В каком смысле следует понимать равноправие строк и столбцов определителя?
2. Какая система уравнений называется совместной?
3. Какая система уравнений называется однородной?
4. Решить системы уравнений: а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

§2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

- Определителем третьего порядка называют выражение

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

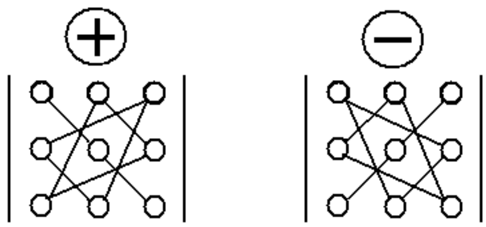
обозначаемое в виде квадратной таблицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Методы непосредственного вычисления определителя третьего порядка

Для запоминания формулы вычисления определителя удобно воспользоваться правилом Саррюса (правилом треугольников):

- Определитель третьего порядка равен сумме произведений его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца так, что со знаком плюс берутся элементы главной диагонали и двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали, а со знаком минус - элементы побочной диагонали и двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали.

Схему образования элементов суммы можно представить в таком виде



Еще один из методов непосредственного вычисления определителя третьего порядка можно назвать способом приписывания столбцов. Он заключается в том, что справа к определителю приписывают два первых столбца и вычисляют сумму произведений элементов, образующих главную диагональ, а также двух параллельных ей диагоналей; от полученного результата отнимают сумму произведений элементов, образующих побочную диагональ, а также двух параллельных ей диагоналей.

v *<u>Пример 5</u>*: Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Воспользуемся методом приписывания столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{matrix} = -6 + 2 + 0 - 0 - 16 - 9 = -29$$

<u>Свойства определителей третьего порядка</u>

1. При транспонировании величина определителя не меняется.
2. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак
3. Если определитель содержит две одинаковых строки (столбца), то

он равен нулю.

Три этих свойства легко доказываются непосредственным вычислением. Для изложения остальных свойств необходимо ввести новые понятия.

- Минором элемента a_{ik} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится данный элемент. Обозначают минор символом M_{ik}, индексы которого совпадают с индексами относящегося к нему элемента a_{ik}.

Например, $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

- Алгебраическим дополнением элемента A_{ik} элемента a_{ik} называется соответствующий ему минор, взятый со знаком плюс, если сумма индексов строки и столбца четная, и со знаком минус – если нечетная.

Например, $A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\qquad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

4. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det(a_{ik}) = \sum_i a_{ik} A_{ik} = \sum_k a_{ik} A_{ik} .$$

Такой способ вычисления называют разложением по строке (столбцу).

Например, $\det(a_{ik}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

✔ *<u>Пример 6</u>*: Вычислим методом разложения определитель, приведенный в примере 5.

Поскольку элемент $a_{13} = 0$, удобно раскладывать по элементам третьего столбца (либо первой строки):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14 - 15 = -29$$

5. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов параллельного ряда равна

нулю.

Для доказательства можно воспользоваться предыдущим свойством №4 и рассмотреть выражение вида $\sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_{jk}$. В развернутом виде оно даст определитель, имеющий две одинаковые строки, который по свойству №3 равен нулю. Например, рассмотрим сумму элементов первой строки на алгебраические дополнения второй строки. В результате получим

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=-a_{11}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{13}a_{32}+a_{12}a_{11}a_{33}-a_{12}a_{13}a_{31}-a_{13}a_{11}a_{32}+a_{13}a_{12}a_{31}=0 .$$

6. Множитель, одинаковый для элементов какой-либо строки (столбца), можно вынести за знак определителя.

Данное свойство элементарно доказывается разложением определителя по строке либо столбцу, содержащим упомянутый постоянный множитель.

7. Определитель, содержащий нулевую строку (столбец) равен нулю.

Для доказательства достаточно разложить определитель по нулевой строке.

8. Если определитель содержит две пропорциональные строки (столбца), то он равен нулю.

Для доказательства достаточно вынести коэффициент пропорциональности за знак определителя и воспользоваться свойством №3

9. Если элементы некоторой строки (столбца) представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, у которых элементы рассматриваемой строки (столбца) равны соответствующим слагаемым, а остальные элементы одинаковы.

Например, $$\begin{vmatrix} (a_{11}+b_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}+b_{21}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}+b_{31}) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

10. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы параллельного ряда, предварительно умножив их на одно и то же число.

- Говорят, что определитель имеет треугольный вид, если все его элементы, расположенные ниже либо выше главной диагонали равны нулю.

11. Определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали.

Перечисленные свойства определителей могут быть использованы для их вычисления.

Таким образом, к уже известным методам непосредственного вычисления определителей могут быть добавлены следующие:

1. Метод разложения по элементам какой-либо строки (столбца), основанный на свойстве №4.

Иллюстрацией метода может служить пример 6.

2. Метод разделения элементов строки (столбца) на сумму двух (или более) слагаемых

v *Пример 7*: Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \cos 2a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \cos 2b \\ \sin^2 g & \cos^2 g & \cos 2g \end{vmatrix}$.

Легко заметить, что после представления элементов третьего столбца в виде суммы (точнее, разности) двух функций определитель согласно свойству №9 можно представить в виде суммы двух определителей, имеющих равные либо пропорциональные столбцы. Согласно свойствам №3 и №8 каждый из них равен нулю, что и иллюстрируют приведенные ниже выкладки:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \cos 2a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \cos 2b \\ \sin^2 g & \cos^2 g & \cos 2g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & (\cos^2 a - \sin^2 a) \\ \sin^2 b & \cos^2 b & (\cos^2 b - \sin^2 b) \\ \sin^2 g & \cos^2 g & (\cos^2 g - \sin^2 g) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \cos^2 a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \cos^2 b \\ \sin^2 g & \cos^2 g & \cos^2 g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & -\sin^2 a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & -\sin^2 b \\ \sin^2 g & \cos^2 g & -\sin^2 g \end{vmatrix} = 0$$

3. Метод приведения к треугольному виду, основанный на свойстве №10, проще всего пояснить примером.

v *Пример 8*: Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.

Воспользуемся методом приведения к треугольному виду. Пользуясь свойством №10, будем стремиться получить нули ниже главной диагонали. Так как $a_{12} = 0$, то достаточно обратить в нули элементы a_{31} и a_{32}. Умножим элементы первой строки на (-4) и прибавим к третьей. После этого умножим на 11 элементы второй строки и прибавим к элементам новой третьей. В результате получим цепочку равенств:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -22 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Понятие об определителях высших порядков

Аналогично определителю третьего порядка можно ввести понятие определителя четвертого, пятого и последующих порядков. Все они получили название определителей высших порядков. В любом случае определитель представляет собой число или выражение, которое находят в соответствии с определенными правилами по его элементам, составляющим квадратную таблицу.

Все свойства определителя третьего порядка справедливы для определителей высших порядков (именно поэтому в формулировках свойств отсутствует указание на порядок определителя).

Наиболее удобным способом вычисления определителей высших порядков является приведение их к треугольному виду. Впрочем, иногда определители высших порядков вычисляют методом понижения порядка, основанном на разложении определителя по элементам строки или столбца. Таким способом удается свести определитель порядка n к сумме n определителей (n-1)-го порядка, затем к сумме n(n-1) определителей (n-2)-го порядка и так далее, пока не будут получены легко вычисляемые определители третьего либо второго порядков.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Возможна ли ситуация, когда алгебраическое дополнение элемента определителя равно его минору?
2. Можно ли для вычисления определителя третьего порядка использовать правило приписывания строк, аналогичное правилу приписывания столбцов?
3. Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Приведите доказательство свойства №3 определителя третьего порядка, не используя метод непосредственного вычисления.

§3. СИСТЕМЫ ТРЁХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases} \qquad (6).$$

Пользуясь символом суммирования Σ, систему (6) можно записать в более компактном виде $\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}x_k = c_1 \\ \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}x_k = c_2 \\ \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}x_k = c_3 \end{cases}$,

либо ещё короче: $\sum\limits_{k=1}^{3} a_{ik}x_k = c_i,$ где индекс i = 1, 2, 3.

Формулы Крамера

По аналогии с системой двух уравнений будем называть главным определителем системы определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных $\Delta = \det(a_{ik})$.

Для решения системы (6) воспользуемся методом исключения неизвестных. Как известно, при этом каждое из уравнений системы (6) необходимо умножить на подходящий множитель, в качестве которого будем использовать алгебраическое дополнение соответствующего элемента главного определителя, и полученные выражения сложить. Если первое уравнение умножить на A_{11}, второе – на A_{21}, а третье – на A_{31}, после сложения получим:

$$+\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}\left|\begin{matrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) + x_3(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) =$$
$$= c_1A_{11} + c_2A_{21} + c_3A_{31}.$$

Легко заметить, что коэффициент при неизвестном x_1 в последнем равенстве представляет собой разложение по первому столбцу главного определителя системы, а коэффициенты при двух других неизвестных согласно свойству №5 определителя третьего порядка равны нулю. В то же время правую часть равенства можно рассматривать как разложение по первому столбцу главного определителя, в котором элементы этого столбца заменены соответствующими свободными членами. Полученный таким способом определитель будем называть первым вспомогательным и обозначать символом Δ_{x1}.

Предположим, что $\Delta \neq 0$. Тогда из полученного уравнения $x_1 \cdot \Delta = \Delta_{x1}$ следует, что $x_1 = \Delta_{x1}/\Delta$.

Совершенно аналогично после умножения уравнений системы на A_{i2} (либо на A_{i3}) получим формулы $x_2 = \Delta_{x2}/\Delta$ и $x_3 = \Delta_{x3}/\Delta$, которые являются частным случаем формул Крамера общего вида:

$$x_k = \frac{\Delta_{xk}}{\Delta} \qquad (7).$$

Таким образом, если главный определитель системы (6) отличен от нуля, то каждое из неизвестных можно найти путем деления соответствующего вспомогательного определителя системы на главный.

<u>Исследование системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными</u>

При решении системы (6) могут иметь место три случая:

1. Главный определитель системы Δ отличен от нуля.

В этом случае система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера.

2. Главный определитель системы Δ равен нулю, но хотя бы один из вспомогательных отличен от нуля.

В этом случае система несовместна вследствие невозможности деления на ноль. Действительно, в такой ситуации хотя бы одно из равенств вида $x_k \cdot \Delta = \Delta_{xk}$ становится невозможным при любом x_k.

3. Главный и все вспомогательные определители системы равны нулю.

Такая система называется неопределенной. Она либо несовместна, либо имеет бесчисленно много решений. Основываясь только на методе Крамера, невозможно сказать, какая из этих двух возможностей действительно реализована. Для анализа такого рода систем необходимо использовать другие методы.

<u>Замечание</u>: Обратим внимание, что в пункте 3 ответ на вопрос об исследовании системы трех уравнений с тремя неизвестными не совпадает с соответствующим пунктом об исследовании системы двух уравнений.

<u>Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными</u>

Согласно определению такая система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \quad (8).$$

Прежде всего отметим, что однородная система всегда совместна, т.к. набор $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ является её решением. На практике могут иметь место 3 случая:

1. Главный определитель отличен от нуля, т.е. $\Delta \neq 0$.

Поскольку все вспомогательные определители очевидно равны нулю, имеет место единственное тривиальное (нулевое) решение.

2. Главный определитель равен нулю, но среди его миноров существует хотя бы один, отличный от нуля, т.е. $\Delta = 0$, но существует $M_{ik} \neq 0$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $M_{33} \neq 0$ (в противном случае можно просто перенумеровать уравнения и неизвестные). Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}x_k \\ a_{21} & a_{22} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}x_k \\ a_{31} & a_{32} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}x_k \end{vmatrix}$. Этот определитель равен нулю, поскольку его третий столбец состоит из нулей (очевидно, что элементы этого столбца представляют собой краткую запись левых частей системы уравнений (8)). Раскладывая определитель по третьему столбцу, получим:

$$A_{13}\sum_{k=1}^{3}a_{1k}x_k + A_{23}\sum_{k=1}^{3}a_{2k}x_k + A_{33}\sum_{k=1}^{3}a_{3k}x_k = 0\,.$$

Т.к. $A_{33} = M_{33} \neq 0$, то третье уравнение системы можно выразить через два первых: $\sum_{k=1}^{3}a_{3k}x_k = -\frac{1}{A_{33}}\left(A_{13}\sum_{k=1}^{3}a_{1k}x_k + A_{23}\sum_{k=1}^{3}a_{2k}x_k\right).$

Таким образом, третье уравнение является следствием (линейной комбинацией) двух первых, в силу чего его можно отбросить и рассматривать далее однородную систему двух уравнений с тремя неизвестными, равносильную исходной системе (8). Ранее было показано, что такая система совместна и имеет бесчисленно много решений вида $x_k = (-1)^{(k+1)} \cdot t \cdot \det(a_{ij})$ при $j \neq k$ (Здесь k - номер неизвестного, а t - произвольная постоянная).

3. Главный определитель системы (8) равен нулю, и среди его миноров не существует ни одного, отличного от нуля, т.е. $\Delta = 0$ и все $M_{ik} = 0$.

В соответствии со свойством №5 определителей 2-го порядка последнее означает, что строки всех миноров (а значит и строки главного определителя) пропорциональны. Значит, все три уравнения системы (8) пропорциональны друг другу и фактически система сводится к одному (безразлично какому конкретно) уравнению с тремя неизвестными. Понятно, что она имеет бесконечно много решений, и чтобы получить какое-то конкретное из них, нужно одновременно двум неизвестным придать какие-либо произвольные значения, а третье найти из уравнения.

- *Пример 9*: Решить систему: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

Вычислим главный определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 1 + 6 = 0\,.$ Поскольку среди миноров этого определителя явно есть ненулевые (например, M_{11}), то одно из уравнений системы является следствием двух других и его можно исключить. Так как безразлично, какое из уравнений исключать, отбросим второе. Оставляя первое и третье уравнения, получим равносильную данной систему $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$.

Её решение $x = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3t;$ $y = -t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = t;$ $z = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4t$.

§ 4. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим некоторое числовое множество К, над элементами которого можно производить алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления (разумеется, для случая, когда делитель отличен от нуля). Будем считать операцию корректной на множестве К, если любой паре чисел из множества К эта операция ставит в соответствие определенное число из того же множества.

- Множество чисел, на котором корректны операции сложения, вычитания, умножения и деления, называется числовым полем.

Легко убедиться, что числовыми полями являются, например, множества действительных чисел, рациональных чисел, комплексных чисел. В то же время множество натуральных чисел не является числовым полем, т.к. в нем некорректны операции вычитания и деления.

Краткое определение линейного пространства можно сформулировать в виде следующего утверждения:

- Линейным пространством, заданным над числовым полем К, называется множество математических объектов любой природы, в котором определены операции их сложения и умножения на числа из поля К.

- Объекты, образующие линейное пространство, называются его элементами или векторами.

Таким образом, векторами, с точки зрения линейной алгебры, могут быть не только объекты, характеризующиеся определенным направлением, но и величины, не имеющие внешне ничего общего с направленными отрезками. Ими могут быть функции, многочлены и даже просто числа. Независимо от природы элементы линейного пространства условимся обозначать строчными латинскими буквами, выделенными жирным шрифтом.

<u>Замечание</u>: *В дальнейшем будем считать, что линейное пространство задано над полем действительных чисел. Предполагается, что необходимые обобщения для случая комплексных чисел будут сделаны позднее в других курсах.*

Сформулируем более строгое определение линейного пространства.

- Множество R элементов любой природы {**x**, **y**, **z**,…} называется линейным пространством, если выполнены три условия:

I. Существует правило, с помощью которого любым двум элементам **x**, **y** из множества R ставится в соответствие элемент **v** того же множества, называемый суммой элементов **x** и **y,** т.е.

$$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R},\ \exists \mathbf{v} \in \mathrm{R}\ |\ \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{v}$$

II. Существует правило, с помощью которого любому элементу **x** из множества R и произвольному действительному числу λ ставится в соответствие элемент **u** множества R, называемый произведением элемента **x** на число λ. Иначе:

$$\forall\ \mathbf{x} \in \mathrm{R},\ \exists \mathbf{u} \in \mathrm{R}\ |\ \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

III. Для всех элементов R справедливы аксиомы линейного пространства:

1. В линейном пространстве R существует единственный нулевой элемент q, который в сумме с любым вектором **x** дает вектор **x**, т.е.

$$\exists\ q \in \mathrm{R}\ |\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathrm{R},\ \mathbf{x}+q = \mathbf{x};$$

2. Для любого элемента линейного пространства R существует противоположный ему элемент (-**x**), который в сумме с вектором **x** дает нулевой вектор q, т.е.

$$\forall\, \mathbf{x} \in R,\ \exists (-\mathbf{x}) \in R \mid \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = q;$$

3. В линейном пространстве R справедливо свойство поглощения единицы:

$$\forall\, \mathbf{x} \in R,\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}\ ;$$

4. В линейном пространстве R выполняется коммутативный закон сложения векторов:

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R,\ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

5. В линейном пространстве R выполняется ассоциативный закон сложения векторов:

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R,\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})\ ;$$

6. В линейном пространстве R справедливо сочетательное свойство умножения вектора на число:

$$\forall\, \mathbf{x} \in R,\ \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{x}\ ;$$

7. В линейном пространстве R справедливо распределительное свойство умножения элементов векторного пространства относительно суммы числовых множителей:

$$\forall\, \mathbf{x} \in R,\ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}\ ;$$

8. В линейном пространстве R справедливо распределительное свойство сложения элементов векторного пространства:

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R,\ \lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}\ .$$

Замечание. В определении линейного пространства ничего не сказано о конкретных правилах выполнения операций сложения элементов и умножения их на числа. Очевидно, эти правила могут быть произвольны, если они удовлетворяют перечисленным аксиомам линейного пространства.

Примерами линейных пространств, кроме уже упомянутых во введении, могут служить: множество всех дифференцируемых функций, заданных на данном интервале [a,b], множество частных решений однородной системы линейных уравнений, множество многочленов степени не выше n и т.д.

Непосредственной проверкой легко установить, что для этих множеств выполняются правила I и II, а также все 8 аксиом, упомянутых в пункте III.

Заметим, что множество многочленов степени n не образует линейного пространства, так как сумма таких многочленов может иметь степень ниже n.

∨ *Пример 10.* Пусть, например, степень n=2, и даны многочлены $\mathbf{p}_1 = (3\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} + \mathbf{3})$ и $\mathbf{p}_2 = (-3\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + \mathbf{5})$.

Легко видеть, что сумма $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = (\mathbf{x} + \mathbf{8})$ не является многочленом второй степени и, следовательно, такое множество не образует линейного пространства.

Приведенный пример наглядно показывает, что перед тем, как применить к элементам какого-либо множества аппарат линейной алгебры, необходимо убедиться в законности его использования.

Контрольные вопросы и задания:

1. В чем отличие числового поля от произвольного множества чисел?
2. Можно ли считать множество иррациональных чисел числовым полем? Ответ обосновать.
3. Сформулируйте краткое определение линейного пространства.
4. Приведите примеры линейных пространств, не упомянутые в данном параграфе.
5. Перечислите аксиомы линейного пространства.
6. Какими рассуждениями можно доказать, что элементы данного множества образуют линейное пространство?

§ 5. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Рассмотрим произвольное линейное пространство R = {**x**, **y**, … **z**, …} и сформулируем ряд определений.

- Линейной комбинацией элементов **x**, **y**, … **z** пространства R называется сумма произведений этих элементов на произвольные действительные числа α, β, …, γ, т.е. выражение вида: $\alpha\cdot\mathbf{x} + \beta\cdot\mathbf{y} + \ldots + \gamma\cdot\mathbf{z}$.
- Элементы **x**, **y**, … **z** пространства R называются линейно зависимыми, если найдутся такие действительные числа α, β, …, γ, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация элементов **x**, **y**, …, **z** с этими числами является нулевым элементом пространства R, т.е. выполняется условие $\alpha\cdot\mathbf{x} + \beta\cdot\mathbf{y} + \ldots + \gamma\cdot\mathbf{z} = q$, причем $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2 \neq 0$.
- Если линейная комбинация $\alpha\cdot\mathbf{x} + \beta\cdot\mathbf{y} + \ldots + \gamma\cdot\mathbf{z} = q$ лишь при условии $\alpha = \beta = \ldots = \gamma = 0$, то элементы **x**, **y**, …, **z** пространства R называются линейно независимыми.

Ø <u>**Теорема**</u>: Для того, чтобы элементы **x**, **y**, …, **z** пространства R были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.

<u>Докажем необходимость</u>.

Пусть $\alpha\cdot\mathbf{x} + \beta\cdot\mathbf{y} + \ldots + \gamma\cdot\mathbf{z} = q$, где для определенности $\alpha\neq0$. Тогда очевидно $\mathbf{x} = (-\beta/\alpha)\cdot\mathbf{y} + \ldots + (-\gamma/\alpha)\cdot\mathbf{z} = \lambda\cdot\mathbf{y} + \ldots + \mu\cdot\mathbf{z}$. Таким образом, вектор **x** есть линейная комбинация элементов **y**, …, **z**. Что и требовалось доказать.

<u>Докажем достаточность</u>.

Пусть вектор $\mathbf{x} = \lambda\cdot\mathbf{y} + \ldots + \mu\cdot\mathbf{z}$. Тогда $(-\mathbf{x} + \lambda\cdot\mathbf{y} + \ldots + \mu\cdot\mathbf{z}) = q$, или $\alpha\cdot\mathbf{x} + \beta\cdot\mathbf{y} + \ldots + \gamma\cdot\mathbf{z} = q$. Так как в этой линейной комбинации $\alpha = -1 \neq 0$, то векторы **x**, **y**, …, **z** по определению линейно независимы. Что и требовалось доказать.

- Число n называется размерностью линейного пространства R, если в нем можно найти n линейно независимых векторов, но любые (n+1) вектора линейно зависимы.

Можно сказать иначе: максимальное число линейно независимых элементов данного линейного пространства R называется его размерностью. Размерность пространства обозначается символом $\dim R = n$ или просто индексом n у наименования пространства: R_n. Число n может быть, вообще говоря, любым (в том числе и ∞). Однако мы будем рассматривать только конечномерные пространства.

- Упорядоченная совокупность n линейно независимых элементов n-мерного линейного пространства называется его базисом.

Система базисных векторов обозначается обычно $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots \mathbf{e_n}\}$. В любом линейном пространстве можно указать бесчисленно много наборов базисных векторов. При этом надо иметь в виду, что если изменить порядок базисных векторов, не меняя самих базисных элементов, то изменится и базис.

- Разложить вектор **x** по базисным векторам $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ – значит представить его в виде их линейной комбинации: $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}$.

- **<u>Теорема</u>**: Любой вектор **x** линейного пространства R_n, имеющего базис $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$, может быть разложен по элементам базиса и притом единственным образом.

<u>Доказательство</u>:

Так как векторы $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots \mathbf{e_n}$ образуют базис, то их линейная комбинация $\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n} \neq q$, если хотя бы одно из $\alpha_i \neq 0$. Если же к базисным векторам добавить произвольный вектор **(-x)**, то система векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}, (-\mathbf{x})$ станет линейно зависимой. Это означает, что найдется такой набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, для которого

$\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n} - \mathbf{x} = q$, откуда $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}$. Последнее выражение и представляет собой разложение вектора **x** по элементам базиса.

Предположим, что существует ещё одно разложение вектора $\mathbf{x} = \alpha'_1\mathbf{e_1} + \alpha'_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha'_n\mathbf{e_n}$, не совпадающее с полученным ранее. Тогда, вычитая друг из друга эти разложения, получим:

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)\cdot\mathbf{e_1} + (\alpha_2 - \alpha'_1)\cdot\mathbf{e_2} + \ldots + (\alpha_n - \alpha'_n)\cdot\mathbf{e_n} = q.$$

Так как векторы $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e_n}$ линейно независимы, последнее равенство возможно лишь при выполнении для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ условия $(\alpha_I - \alpha'_i) = 0$, откуда следует, что $\alpha_i \equiv \alpha'_i$. Полученный результат говорит о том, что наше первоначальное предположение было неверным, и на самом деле существует единственное разложение произвольного вектора **x** по базису $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$. Что и требовалось доказать.

- Коэффициенты разложения вектора по данной базисной системе векторов называются его координатами в данном базисе.

Условимся далее обозначать координаты вектора той же буквой, что и сам вектор, но с соответствующим индексом. Координаты вектора будем писать в фигурных скобках через знак “=”. Таким образом, если задан базис линейного пространства R_n, то любой элемент $\mathbf{x} \in R_n$ можно однозначно определить, задав упорядоченную совокупность чисел (координат этого элемента): $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Очевидно, что только нулевой вектор q имеет координаты $\{0, 0, \ldots, 0\}$. Координаты базисных векторов $\mathbf{e_1} = \{1, 0, \ldots, 0\}$, $\mathbf{e_2} = \{0, 1, \ldots, 0\}$, …, $\mathbf{e_n} = \{0, 0, \ldots, 1\}$.

При сложении (вычитании) векторов их соответственные координаты складываются (вычитаются), при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число. Предлагаем читателю самостоятельно доказать эти утверждения.

v *Пример 11.* Пусть линейное пространство состоит из многочленов не выше третьей степени. Тогда за базис естественно принять четыре вектора: $\mathbf{x}^3$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}$ и **1**. При этом любой многочлен степени не выше 3-й может быть однозначно представлен в виде линейной комбинации базисных элементов. Например, многочлен $\mathbf{p}=(5\mathbf{x}^3-\mathbf{x}+2)$ в указанном базисе будет иметь координаты {5, 0, -1, 2}. Разумеется, в качестве базисных можно было принять и другой набор линейно независимых элементов, например $(\mathbf{x}-\mathbf{1})^3$, $(\mathbf{x}+\mathbf{2})^2$, $\mathbf{x}$ и **2**. Тогда тот же многочлен **p** имел бы другие координаты.

Контрольные вопросы и задания:

1. Что понимается в линейной алгебре под вектором?
2. Что называется линейной комбинацией векторов?
3. Какие векторы называются линейно зависимыми?
4. Что называется базисом линейного пространства?
5. Что называется координатами элемента линейного пространства?
6. Докажите, что при сложении векторов их соответственные координаты складываются.
7. Вычислите координаты приведенного в примере 11 многочлена **p** при переходе к указанному новому базису.
8. Можно ли считать различными базисы, отличающиеся только порядком базисных элементов?

§ 6. ПОНЯТИЕ ОПЕРАТОРА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

МАТРИЦА ОПЕРАТОРА

Сформулируем определение.

- Если в линейном пространстве R каждому вектору $\mathbf{x} \in R$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{y} \in R$, то говорят, что в пространстве R задано преобразование, а совокупность операций, которые надо совершить над вектором **x**, чтобы получить из него вектор **y**, называют оператором преобразования $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$ и обозначают символом $\hat{A}$.

Записывают это так: $\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x}$ (читается: игрек равно а от икс). При этом вектор **y** называют образом вектора **x** , а **x** – прообразом вектора **y**.

<u>*Замечание*</u>*: мы будем использовать понятие оператора в узком смысле, сформулированном выше, - как линейное преобразование. В более широком толковании оператором называют отображение одного линейного пространства на другое, когда каждому элементу некоторого пространства L поставлен в соответствие элемент другого линейного пространства M (возможно, иной природы и другой размерности). Если определить оператор как преобразование пространства (т.е. как отражение его на себя), то в использовании этого понятия необходимо соблюдать осторожность. Так, например, нельзя над пространством действительных чисел рассматривать оператор извлечения квадратного корня, так как при действии его на отрицательное число получается элемент, не принадлежащий данному пространству (мнимое число).*

Понятие оператора может вводиться и использоваться очень широко. Как правило, мы не задумываемся, что практически все математические действия по сути своей являются операторами.

v <u>*Пример 12.*</u> Так в пространстве действительных чисел можно определить оператор $\hat{A}$ возведения в куб, когда каждому числу **x** ставится в соответствие число $\mathbf{y} = \mathbf{x}^3$, так что, например, $\hat{A}(3) = 27$.

<u>Замечание</u>: *Оператор, заданный над линейным пространством чисел, называется функцией.*

v <u>*Пример 13.*</u> В пространстве непрерывных дифференцируемых функций аргумента **x** можно ввести оператор дифференцирования $\hat{D}$, который каждой такой функции $f(x)$ ставит в соответствие её производную $f'(x)$, так что $\hat{D}\, f(x) = df(x)/dx$.

Линейная алгебра изучает так называемые линейные операторы.

• Оператор Â, заданный в линейном пространстве R, называется линейным, если для любых двух элементов этого пространства **x, y** и произвольного числа λ выполняются соотношения:

1. $\hat{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \hat{A}\mathbf{x}+\hat{A}\mathbf{y}$ – свойство аддитивности;
2. $\hat{A}(\lambda\cdot\mathbf{x}) = \lambda\cdot\hat{A}\mathbf{x}$ – свойство однородности.

<u>Замечание</u>: *Иногда свойства аддитивности и однородности не разделяют и определяют линейный оператор* Â *как удовлетворяющий обобщенному условию:* $\hat{A}(\alpha\cdot\mathbf{x} + \beta\cdot\mathbf{y}) = \alpha\cdot\hat{A}\mathbf{x} + \beta\cdot\hat{A}\mathbf{y}$.

v <u>*Пример 14.*</u> В качестве одного из примеров линейных операторов рассмотрим в пространстве геометрических векторов R_2 оператор Â поворота вектора **x** на угол α.

Пусть известно, что вектор $\mathbf{y} = \{y_1, y_2\}$ получен поворотом вектора $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ на угол α (смотри рис. 1). Введем понятие оператора поворота Â и обозначим $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Из чертежа можно легко найти координаты вектора **y**:

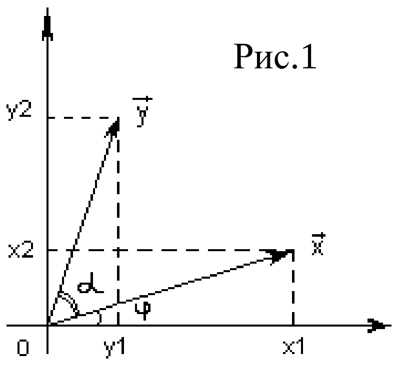


Рис.1

$y_1 = |\mathbf{y}|\cdot\cos(\varphi+\alpha)$; $y_2 = |\mathbf{y}|\cdot\sin(\varphi+\alpha)$. Очевидно, что при повороте $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$, поэтому

$y_1 = |\mathbf{x}|\cdot(\cos\varphi\cdot\cos\alpha - \sin\varphi\cdot\sin\alpha)$,

$y_2 = |\mathbf{x}|\cdot(\sin\varphi\cdot\cos\alpha + \cos\varphi\cdot\sin\alpha)$.

Но так как $|\mathbf{x}|\cdot\cos\varphi = x_1$, $|\mathbf{x}|\cdot\sin\varphi = x_2$, то

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos a - x_2 \sin a \\ y_2 = x_1 \sin a + x_2 \cos a \end{cases} \tag{9}$$

Если обозначить через a_{ik} коэффициент при k-ой координате в i-ом уравнении, то формулы преобразования (9) примут вид:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

Как видим, оператор поворота $\hat{A}$ вполне определяется совокупностью коэффициентов a_{ik}, входящих в формулы преобразования (9). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что условия линейности для этого оператора выполняются.

Отталкиваясь от приведенного примера, легко понять, что самым общим видом линейных преобразований, определённых в n-мерном линейном пространстве R_n, является оператор Â, задающий каждую координату y_i нового вектора **y** (образа **x**) в виде линейной комбинации координат x_i исходного вектора **x** (прообраза **y**) так что **y** = Â**x** означает:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_k \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}x_k \\ \mathbf{L\,L\,L\,L\,L\,L\,L\,L\,L} \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}x_k \end{cases} \tag{10}$$

- Таблицу коэффициентов a_{ik}, записанную в порядке расположения их в уравнениях преобразования (10), называют матрицей оператора Â.

Саму таблицу заключают при этом в скобки (…), или […], или $\|\mathbf{L}\|$ и обозначают той же буквой A без знака ^ сверху. Таким образом, для рассмотренного в примере 14 оператора поворота матрица имеет вид:

$A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$. Для произвольного оператора матрица принимает вид квадратной таблицы:

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{11}$$

<u>*Замечание:*</u> *В общем случае, когда оператор представляет собой отображение одного линейного пространства на другое, его матрица может быть и не квадратной.*

Коэффициенты a_{ik}, составляющие таблицу (11), называется элементами матрицы A, а индексы i и k обозначают соответственно номер строки и номер столбца.

<u>*Замечание:*</u> *внешне матрица очень похожа на определитель, но это совершенно разные математические объекты: матрица – таблица, а определитель – число или выражение, вычисляемое по определенным правилам.*

Понятие матрицы имеет в математике самостоятельное значение и не ограничивается только характеристикой оператора, поэтому в следующем параграфе рассмотрим его подробнее.

<u>***Контрольные вопросы и задания:***</u>

1. Что такое оператор?
2. Какие операторы называются линейными?
3. Что называется матрицей оператора?
4. В чём заключается основное отличие матрицы от определителя?
5. Какие из приведенных ниже операторов преобразований являются линейными и почему?

а) $\hat{A}\mathbf{x} = \{3x_1 + x_2 - 2x_3;\ x_2 + x_3;\ x_1 - x_2 + 4x_3\}$

б) $\hat{A}\,\mathbf{x} = \{x_1 + 3(x_3)^3;\ 2x_1 - x_2 + 3x_3;\ x_2\}$

в) $\hat{A}\,\mathbf{x} = \{4x_1 - 2x_2 + 2x_3;\ x_2 + x_3;\ x_1 - x_2 + 5\}$

§ 7. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ

Прежде всего сформулируем ряд определений.

- Матрицей размера $(m\times n)$ называется произвольная совокупность элементов (чисел, функций или алгебраических выражений), расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.
- Если элементами матрицы являются числа, то она называется числовой матрицей.
- Размер матрицы определяется числом её строк и столбцов и обозначается символом $(m\times n)$.
- Матрица, размера $(1\times n)$ называется матрицей-строкой.
- Матрица, размера $(m\times 1)$ называется матрицей-столбцом.
- Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной.
- Число строк квадратной матрицы называется её порядком.
- Элементы с одинаковыми индексами a_{11}, a_{22}, … a_{nn} образуют главную диагональ, а элементы a_{n1}, $a_{(n-1)2}$, …, a_{1n} образуют побочную диагональ квадратной матрицы.
- Если все элементы матрицы равны нулю, матрица называется нулевой.
- Квадратная матрица, все элементы которой, кроме стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной и обозначается символом $\mathrm{Diag}(a_k)$.

Наличие одного индекса вместо двух подчеркивает, что все недиагональные элементы такой матрицы равны нулю.

- Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны 1, называется единичной матрицей и обозначается символом E.

Часто пишут $E = \delta_{ik}$, где δ_{ik} – так называемый символ Кронекера: 1 при $i=k$ и 0 при $i \neq k$. Для диагональной матрицы можно записать $\mathrm{Diag}(a_k) = a_k \cdot \delta_{ik}$.

Заметим, что для полной идентификации единичной матрицы необходимо обязательно знать её порядок.

- Квадратная матрица называется треугольной, если все её элементы, расположенные ниже либо выше главной диагонали, равны нулю.

Пример: $$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

- Прямоугольную матрицу называют ступенчатой, если её первая строка содержит хотя бы один ненулевой элемент, а в каждой из последующих строк первый ненулевой элемент расположен правее, чем в предыдущей. При этом возможно, что несколько последних строк ступенчатой матрицы состоят из нулей.

В частности, ступенчатой можно считать треугольную матрицу, а также матрицу, выписанную ниже:

$$\begin{Vmatrix} 5 & 7 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

- Две матрицы называются равными, если они одинакового размера и все их соответственные элементы равны между собой.
- Матрица, полученная из данной заменой строк столбцами без изменения их порядка, называется транспонированной. Она обозначается верхним индексом ^{T} у обозначения матрицы, например: A^T.

- Если матрица A совпадает со своей транспонированной A^T, (для нее $a_{ik} = a_{ki}$), то она называется симметрической. Матрица, для которой $a_{ik} = -a_{ki}$, называется кососимметрической.

С каждой квадратной матрицей можно связать определитель, составленный из тех же элементов.

- Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы A, называется её детерминантом и обозначается символом DetA.
- Если детерминант матрицы равен нулю, то матрица A называется вырожденной (или особенной); в противном случае матрица называется невырожденной (неособенной).
- Минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, полученный из элементов матрицы, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов, записанных в том же порядке, что и в матрице.
- Наивысший порядок отличного от нуля минора называется рангом матрицы и обозначается символом RgA.

Из определения ранга следует, что для матрицы размера $(m\times n)$ $0 \le RgA \le \min(m,n)$, где символом $\min(m,n)$ обозначено меньшее из двух чисел m и n.

Если строки матрицы размера $(m\times n)$ рассматривать как координаты некоторого n-мерного вектора, то для строк по аналогии с векторами можно определить понятия линейной зависимости, базиса и т. д. Тогда рангом матрицы можно назвать максимальное число ее линейно независимых строк.

Практически ранг матрицы вычисляют обычно методом приведения к ступенчатому виду с помощью так называемых элементарных преобразований. К элементарным преобразованиям относятся:

1. Транспонирование.
2. Перемена местами двух строк (столбцов).

3. Умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) на произвольное, отличное от нуля число.

4. Прибавление ко всем элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

5. Исключение из матрицы нулевой либо пропорциональной строки.

- Матрицы, получаемые одна из другой с помощью элементарных преобразований, называют эквивалентными.

Можно показать, что в результате элементарных преобразований получается новая матрица, но с тем же рангом. Эквивалентность матриц будем показывать знаком ~ или (когда требуется подчеркнуть, что из одной матрицы получается другая, эквивалентная первой) символом $\Rightarrow$.

v *Пример 15.* Рассмотрим пример на вычисление ранга матрицы.

Пусть $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$. Приведем ее к ступенчатому виду.

Для этого на первом этапе прибавим ко 2-й строке 1-ю, домножив ее на (-2), а из 3-й и 4-й строк вычтем 1-ю. На втором этапе оставим без изменения две первых строки, к 3-й строке прибавим 2-ю, умножив ее предварительно на 2, а к 4-й строке прибавим утроенную 2-ю. На последнем этапе вычеркнем нулевую строку. Тогда цепочку преобразований можно представить в виде:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда непосредственно видно, что минор третьего порядка, расположенный в правом верхнем углу последней матрицы, отличен от нуля (он имеет треугольный вид и равен (-5)). Таким образом, по определению имеем RgA=3.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Что такое ранг матрицы?
2. Какие матрицы называются равными?
3. Перечислите элементарные преобразования над строками матрицы
4. Что такое эквивалентные преобразования матрицы?
5. Как практически вычисляется ранг матрицы?
6. Вычислить ранг матрицы $\begin{Vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.
7. Что такое транспонирование матрицы?
8. Какие матрицы считаются эквивалентными?
9. Можно ли однозначно утверждать, что определитель n-го порядка есть число?

§ 8. ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ

Как уже упоминалось, элементы каждой строки (столбца) матрицы могут рассматриваться как координаты вектора. Тогда для строк (или столбцов) могут быть определены понятия линейной комбинации, линейной зависимости и базиса аналогично тому, как это сделано в §5 для векторов. Линейно независимые строки матрицы будем называть базисными. Метод нахождения базисных строк понятен из примера 15, приведенного в конце предыдущего параграфа (в этом примере базисными являются три первые строки).

Отметим, что выбор базисных строк неоднозначен (он зависит от метода приведения ее к ступенчатому виду), однако число их для данной матрицы не зависит от способа нахождения базисных строк и равно рангу матрицы.

- Базисным минором матрицы называется любой её ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы.
- Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются базисными.

Из определения следует, что для любой ненулевой матрицы существует базисный минор (вообще говоря, не единственный).

Ø **Теорема** (о базисном миноре): Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы; любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Доказательство проведем только для строк (для столбцов все рассуждения аналогичны). Если бы базисные строки были линейно зависимы, то хотя бы одна из них являлась линейной комбинацией других (см. §5) и по известному свойству определителей базисный минор был бы равен нулю, что противоречит его определению. Вторая часть теоремы для базисных строк очевидна. Докажем её для небазисных строк. Пусть для определённости базисный минор M имеет порядок r и расположен в левом верхнем углу матрицы (в противном случае с помощью элементарных преобразований приведём матрицу к такому виду). Рассмотрим определитель (r+1)-го порядка матрицы A, полученный приписыванием к базисному минору элементов i-й строки и j-го столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

В силу того, что упомянутый минор порядка r базисный, определитель Δ равен нулю. Разложив его по последнему столбцу, получим:

$$\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \mathbf{K} + a_{rj} \cdot A_{rj} + a_{ij} \cdot A_{ij} = 0 \qquad (12)$$

Так как $|A_{ij}| = |M_{ij}| \neq 0$, то из последнего выражения следует:

$$a_{ij} = -\frac{A_{1j}}{A_{ij}} \cdot a_{1j} - \frac{A_{2j}}{A_{ij}} \cdot a_{2j} - \mathbf{K} - \frac{A_{rj}}{A_{ij}} \cdot a_{rj}\,.$$

Или, обозначая коэффициенты при a_{ij} через α_k,

$$a_{ij} = a_1 \cdot a_{1j} + a_2 \cdot a_{2j} + \mathbf{K} + a_r \cdot a_{rj}\,.$$

Это означает, что i-я строка является линейной комбинацией строк, проходящих через базисный минор М, т.е. линейной комбинацией базисных строк.

<u>*Замечание*</u>: *Идея, использованная при доказательстве теоремы о базисном миноре, может быть применена для практического вычисления ранга матрицы специфическим способом, получившим название метода окаймления миноров. Для этого внутри матрицы находят некоторый отличный от нуля минор (зачастую он может быть известен заранее), а затем вычисляют все окаймляющие (т.е. содержащие его внутри себя) миноры. Наивысший порядок одного из этих миноров, отличного от нуля, и есть ранг матрицы.*

v <u>*Пример 16.*</u> Рассмотрим пример, иллюстрирующий содержание теоремы о базисном миноре. Пусть А - матрица из примера 15 (см. §7). Как было установлено, за её базисный минор можно принять определитель 3-го порядка, расположенный в правом верхнем углу. Тогда строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, являются базисными. На основании доказанной теоремы любая строка (столбец) исходной матрицы могут быть представлены в виде линейной комбинации базисных. Продемонстрируем это для элементов 2-го столбца. Будем рассматривать столбцы как векторы. Базисные столбцы имеют координаты $\mathbf{S_3} = \{-1, -2, -1, -1\}$, $\mathbf{S_4} = \{-2, -5, 0, 1\}$, $\mathbf{S_5} = \{-2, -4, -7, -2\}$, а небазисный второй столбец

$\mathbf{S_2} = \{1, 3, -1, -2\}$. Согласно теореме о базисном миноре $\mathbf{S_2} = \alpha\cdot\mathbf{S_3} + \beta\cdot\mathbf{S_4} + \gamma\cdot\mathbf{S_5}$.

В развернутом виде это можно представить как систему четырех уравнений с тремя неизвестными α, β, γ

$$\begin{cases} -\alpha-2\beta-2\gamma=1 \\ -2\alpha-5\beta-4\gamma=3 \\ -\alpha-7\gamma=-1 \\ -\alpha+\beta-2\gamma=-2 \end{cases}, \text{ которая равносильна системе } \begin{cases} -\alpha-2\beta-2\gamma=1 \\ \alpha+6\beta+2\gamma=-5 \\ -\alpha-7\gamma=-1 \end{cases}$$

Система трех уравнений получается, если из 4-го уравнения вычесть 2-ое. Решая последнюю систему уравнений любым известным методом (например, по формулам Крамера), приходим к выводу, что она имеет единственное решение $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$. Следовательно, 2-й столбец матрицы А может быть представлен в виде линейной комбинации базисных столбцов: $\mathbf{S_2} = \mathbf{S_3} - \mathbf{S_4}$. Аналогично можно показать, что, например, 4-ая (небазисная) строка может быть представлена в виде линейной комбинации трех первых (базисных) строк.

<u>Замечание:</u> как следует из определения, понятия базисных строк и столбцов имеют смысл только по отношению к конкретному базисному минору, а не к матрице в целом, поэтому их выбор также неоднозначен.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Какие строки матрицы называют базисными?
2. Как практически найти базисный минор?
3. В чем суть теоремы о базисном миноре?
4. Для матрицы $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{Vmatrix}$ вычислить ранг и записать два разных базисных минора.

5. Покажите, что для матрицы из примера 15 (см. §7) одна из четырёх строк может быть представлена в виде линейной комбинации трёх других.

§ 9. СОСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Так как любой вектор линейного пространства может быть однозначно представлен в виде линейной комбинации базисных векторов, то для нахождения образа произвольного вектора при воздействии данного линейного оператора необходимо знать, что делает этот оператор с каждым из базисных элементов. В §6 было введено понятие матрицы A линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве R_n с базисом $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$. Пусть оператор $\hat{A}$ переводит каждый из базисных векторов $\mathbf{e_k}$ в вектор $\mathbf{f_k}$, так что $\hat{A}\mathbf{e_k} = \mathbf{f_k}$. Предположим, что нам известны координаты образов всех базисных векторов в заданном базисе:

$$\mathbf{f_k} = \{\, a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk} \} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e_i}\,.$$

Произвольный вектор $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ оператором $\hat{A}$ переводится в вектор $\mathbf{y}=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Разложения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют вид:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e_k} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e_i}$$

Тогда с учетом линейности оператора можно записать цепочку равенств:

$$\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x} = \hat{A}\sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e_k} = \sum_{k=1}^{n} \hat{A}(x_k\mathbf{e_k}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\hat{A}\mathbf{e_k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} a_{ik}\mathbf{e_i} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} x_k a_{ik}\mathbf{e_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right)\cdot\mathbf{e_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e_i}\,;\ \text{где}\ y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\,.$$

Последнее равенство для y_i в развернутой форме может быть записано в виде системы уравнений преобразования (11), приведенных в §6, коэффициенты которой являются элементами матрицы A оператора $\hat{A}$.

Проведённые выкладки позволяют сформулировать

- **Правило**: Чтобы составить матрицу A линейного оператора Â, нужно в соответствующие столбцы поставить координаты образов базисных векторов $\hat{A}\mathbf{e}_k$; тогда каждая строка матрицы даст коэффициенты разложения соответствующей координаты вектора $\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x}$ по координатам вектора **x**.

Примем без доказательства утверждение:

- **Теорема**: Существует один и только один линейный оператор Â, переводящий базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, пространства R_n в некоторую произвольно заданную систему векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$.

Это позволяет отождествить оператор с его матрицей в данном базисе в том смысле, что если в пространстве с фиксированным базисом задан оператор, то его матрица определена однозначно и наоборот.

- *Пример 17.* Применим сформулированное выше правило для составления матрицы оператора поворота из примера 14. Легко заметить, что базисные орты декартовой системы координат **i** и **j** при повороте на угол α преобразуются в орты с координатами $\mathbf{i}'=\{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ и $\mathbf{j}'=\{-\sin\alpha; \cos\alpha\}$. Записав эти координаты в соответствующие столбцы, получим матрицу A, совпадающую с приведенной в примере 14, где она была выведена другим способом.

- *Пример 18.* Установим вид матрицы тождественного оператора $\hat{E}$, который каждому вектору **x** ставит в соответствие тот же самый вектор. Так как $\hat{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, то $\hat{E}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, , $\hat{E}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$, …, $\hat{E}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n$ и в соответствующие столбцы матрицы E необходимо записать координаты самих базисных векторов $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, \ldots, 0\}$, …, $\mathbf{e}_n = \{0, 0, \ldots, 1\}$,

так что она примет вид: $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$.

<u>Замечание</u>: Все рассуждения этого параграфа соответствуют случаю, когда образ и прообраз вектора принадлежат одному и тому же линейному пространству. В этом случае матрица оператора обязательно квадратная. В общем случае, как уже отмечалось, образ и прообраз вектора могут принадлежать разным линейным пространствам, в каждом из которых задан свой базис. Если при этом размерности пространств различны, то матрица оператора не будет квадратной.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Сформулируйте правило составления матрицы оператора.
2. Может ли матрица оператора быть неквадратной?
3. Какие свойства оператора позволяют находить образ произвольного вектора линейного пространства с помощью матрицы оператора?
4. Составьте матрицу оператора, действующего в трехмерном пространстве геометрических векторов, который проецирует векторы этого пространства на плоскость y=0.

§ 10. ДЕЙСТВИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И МАТРИЦАМИ

Рассмотрим основные математические действия, которые можно производить с операторами и матрицами.

<u>Равенство операторов и матриц</u>

- Два оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующие в линейном пространстве R, называются равными, если для любого вектора **x** из этого пространства справедливо равенство $\hat{A}\mathbf{x}=\hat{B}\mathbf{x}$.

В силу отождествления оператора с его матрицей из равенства операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ следует равенство их матриц A и B.

- Матрицы A и B называются равными, если они одинакового размера и все их соответственные элементы равны между собой, т. е. выполняется условие $a_{ik}=b_{ik}$.

Сложение операторов и матриц

- Суммой линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в линейном пространстве R, называется такой оператор ($\hat{A}$ + $\hat{B}$), что для любого $\mathbf{x} \in R$ справедливо равенство $(\hat{A} + \hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{B}\mathbf{x}$.

Установим вид матрицы суммы операторов. Пусть в некотором базисе операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют соответственно матрицы $A = \| a_{ik} \|$ и $B = \| b_{ik} \|$, так что можно записать:

$$\hat{A}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i \ , \qquad \hat{B}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\mathbf{e}_i \ .$$ По определению

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\mathbf{e}_k = \hat{A}\mathbf{e}_k + \hat{B}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ik} + b_{ik}\right)\cdot \mathbf{e}_i \ .$$

Таким образом, матрица суммы операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеет вид $\| a_{ik} + b_{ik} \|$.

Это позволяет сформулировать правило сложения матриц:

- Чтобы сложить две матрицы, нужно сложить их элементы с одинаковыми индексами (понятно, что складывать можно только матрицы одинакового размера).

Очевидно, что для суммы операторов и матриц справедливы коммутативный и ассоциативный законы, соответственно:

1. $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$ для операторов, или $A + B = B + A$ для матриц;
2. $(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C})$ для операторов, или $(A + B) + C = A + (B + C)$ для матриц.

Умножение оператора и матрицы на число

- Произведением линейного оператора $\hat{A}$, заданного в пространстве R_n, на действительное число λ называется оператор $(\lambda \cdot \hat{A})$, определяемый равенством $\left(\lambda\hat{A}\right)\mathbf{x} = \lambda \cdot \hat{A}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in R_n$.

Установим вид его матрицы. Так как по определению $\left(\lambda\hat{A}\right)\mathbf{x} = \lambda \cdot \hat{A}\mathbf{x}$, то для каждого базисного элемента $\mathbf{e}_k$ выполняется цепочка равенств:

$$\left(\lambda\hat{A}\right)\mathbf{e}_k = \lambda\cdot\hat{A}\mathbf{e}_k = \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\cdot\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\cdot a_{ik}\right)\cdot\mathbf{e}_i\,.$$

Это означает, что матрица оператора $(\lambda\cdot\hat{A})$ должна иметь вид: $\left\|\lambda\cdot a_{ik}\right\|$.

Отсюда следует вывод:

- При умножении матрицы на число необходимо каждый её элемент умножить на это число.

Заметим, что при умножении определителя на число достаточно умножить на это число элементы только одной его строки или столбца.

Произведение оператора на число обладает очевидными свойствами (каждое из них может быть строго доказано):

1). $\lambda\cdot\hat{A} = \hat{A}\cdot\lambda$

2). $\lambda\cdot(\hat{A}+\hat{B}) = \lambda\cdot\hat{A}+\lambda\cdot\hat{B}$

3). $\lambda\cdot(\mu\cdot\hat{A}) = (\lambda\cdot\mu)\cdot\hat{A}$

4). $(\lambda+\mu)\cdot\hat{A} = \lambda\cdot\hat{A}+\mu\cdot\hat{A}$

Аналогичные соотношения можно записать и для матриц.

Вычитание операторов

- Разностью операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в линейном пространстве R, называется оператор $(\hat{A}-\hat{B})$, определяемый равенством $(\hat{A}-\hat{B}) = \hat{A}+(-1)\cdot\hat{B}$.

Очевидно, что каждый элемент матрицы этого оператора равен разности соответствующих элементов матриц A и B.

Понятно, что операция вычитания (как и сложения) может быть определена только для матриц одного размера.

Умножение операторов

- Оператор $\hat{C} = \hat{A}\cdot\hat{B}$ называется произведением или суперпозицией операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, если его действие состоит в последовательном применении заданных операторов (сначала $\hat{B}$, потом $\hat{A}$), так что $\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)\mathbf{x} = \hat{A}\left(\hat{B}\,\mathbf{x}\right)$.

Из определения следует, что если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ линейные, то $\hat{G}$ - тоже линейный оператор. Установим вид матрицы оператора $\hat{G}$. По определению $(\hat{A}\cdot\hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}(\hat{B}\mathbf{x})$. Рассмотрим для простоты случай, когда $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$. Пусть

$$\hat{A}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i\,, \qquad \hat{B}\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{e}_j\,. \qquad \text{Тогда}$$

$$(\hat{A}\cdot\hat{B})\mathbf{e_k} = \hat{A}(\hat{B}\mathbf{e_k}) = \hat{A}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\hat{A}(b_{jk}\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\hat{A}\mathbf{e}_j$$

Но по условию $\hat{A}\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i$, поэтому

$$(\hat{A}\cdot\hat{B})\mathbf{e_k} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{b}_{jk}\mathrm{a}_{ij}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{a}_{ij}\mathrm{b}_{jk}\right)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{g}_{ik}\mathbf{e}_i\,,$$ где для выражения в скобках введено обозначение g_{ik}.

Совокупность коэффициентов g_{ik} определяет матрицу G оператора $\hat{G}$, равного произведению операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Таким образом, произведению операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ соответствует произведение их матриц, которое само в данном случае является матрицей того же порядка. Это позволяет сформулировать правило умножения матриц, кратко называемое “строка на столбец”:

- Чтобы получить элемент g_{ik} произведения матриц A и B, принадлежащий i-ой строке и k-ому столбцу, надо элементы i-ой строки матрицы A умножить на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B и результаты сложить.

Замечание: аналогичное правило справедливо и при умножении определителей (естественно, если они одного порядка).

Умножение матриц

Полученное при рассмотрении умножения операторов правило "строка на столбец" умножения матриц можно распространить и на неквадратные матрицы, необходимо только, чтобы число столбцов первой матрицы совпадало с числом строк второй (иначе мы не сможем составить сумму).

v *<u>Пример 19</u>.* Пользуясь упомянутым правилом, найдем произведение:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (1+0+3) & (1+2+0) \\ (0+0+0) & (0+1+0) \\ (0+0+1) & (0+0+0) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Из приведенных рассуждений и рассмотренного примера можно сделать следующий вывод:

- Произведение матриц определено только тогда, когда число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы-множителя; если матрица-произведение существует, то она содержит столько строк, сколько первая из перемножаемых матриц, и столько столбцов - сколько вторая.

В теоретической физике чаще всего приходится иметь дело с квадратными (размера $n\times n$), строчными (размера $1\times n$) и столбцовыми (размера $n\times 1$) матрицами. Для таких матриц можно составить символическую "таблицу умножения", приведенную на рис. 2.

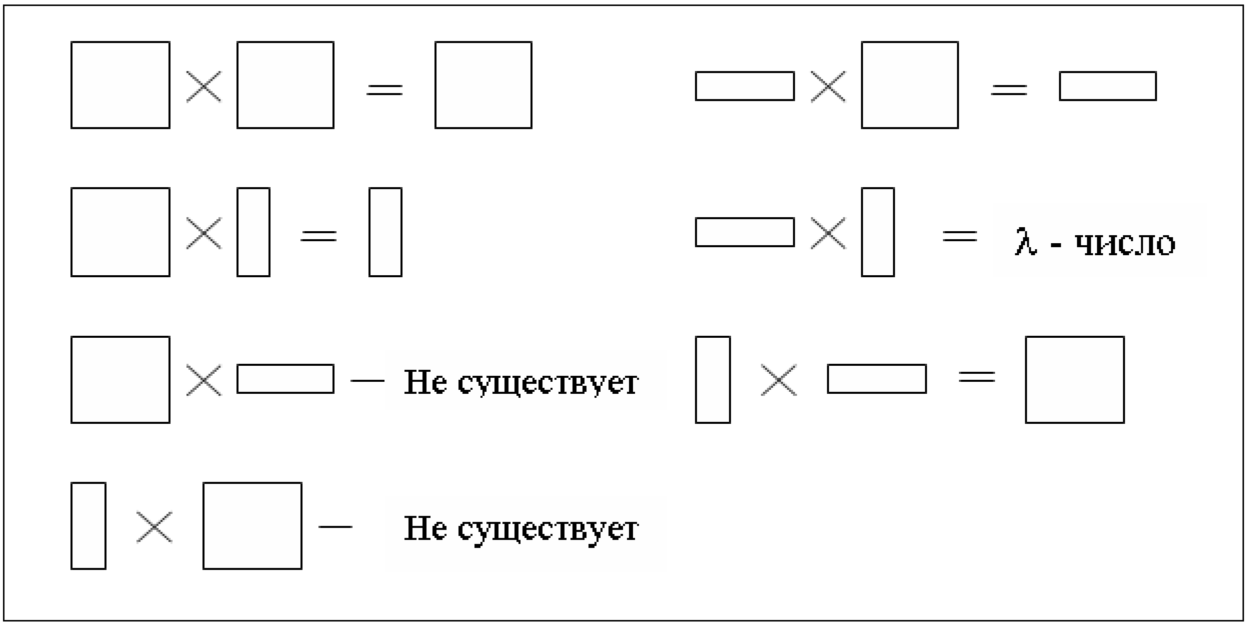


Рис. 2. Символическая таблица умножения матриц

Свойства произведения матриц

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$ — произведение матриц в общем случае некоммутативно (более того, иногда одно из произведений может существовать, а другое – нет);

2) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ — сочетательный закон;

3) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ — распределительный закон.

- Если для матриц A и B выполняется условие $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются перестановочными или коммутирующими.

Так как каждой квадратной матрице порядка n в некотором линейном пространстве R_n с фиксированным базисом соответствует оператор, то указанные выше три свойства матриц можно распространить и на операторы.

- В случае, когда $\hat{A} \cdot \hat{B} = \hat{B} \cdot \hat{A}$, операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются коммутирующими, а выражение $\hat{A} \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot \hat{A} = \Theta$.
- В случае, когда $\hat{A} \cdot \hat{B} \neq \hat{B} \cdot \hat{A}$, операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются некоммутирующими, а оператор $\left[\hat{A}\hat{B}\right] = \hat{A} \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot \hat{A}$ называют коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Очевидно, что коммутатор линейных операторов сам является линейным оператором. При преобразовании выражений, содержащих коммутаторы, используют следующие их свойства:

1) $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$

2) $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$

3) $[\lambda \cdot \hat{A}, \hat{B}] = \lambda \cdot [\hat{A}, \hat{B}]$, где λ — число

4) $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$

5) $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$

С каждой квадратной матрицей можно связать определитель, составленный из тех же самых элементов, который называют детерминантом матрицы. Для детерминантов матриц справедлива теорема об умножении определителей, формулировка которой приведена ниже.

Ø **<u>Теорема:</u>** Определитель произведения матриц одного порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц, т.е.

Det(A·B) = DetA·DetB.

Проверим это утверждение для матриц второго порядка непосредственно:

$$A\cdot B=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})\\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})\end{Vmatrix}$$

Пользуясь известными свойствами определителей, Det(A·B) можно представить в виде суммы четырёх определителей:

$$\mathrm{Det}(A\cdot B)=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}\\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}\\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22}\\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}$$

Так как первый и последний определители, очевидно, равны нулю, то

$$\mathrm{Det}\,(A\cdot B)=b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}\\ a_{22} & a_{21}\end{vmatrix}$$

Меняя местами столбцы определителя во втором слагаемом, вынесем detA за скобку как общий множитель. Тогда

$$\mathrm{Det}\,(A\cdot B)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})=\mathrm{Det}\,A\cdot\mathrm{Det}\,B$$

Аналогично можно доказать справедливость теоремы и для матриц более высокого порядка.

При известной матрице оператора умножение матриц позволяет легко найти образ вектора по координатам его прообраза. Условимся записывать координаты векторов в виде столбцовых матриц. Тогда выражению $\hat{A}$**x** можно сопоставить произведение квадратной матрицы A оператора $\hat{A}$ на матрицу-столбец X из координат вектора **x**. В результате получим матрицу-столбец Y из координат вектора **y** – образа вектора **x**.

v *<u>Пример 20</u>*. Пусть в линейном пространстве R_2 задан оператор $\hat{A}$ с матрицей A = $\begin{Vmatrix} 5 & -1\\ 2 & 3\end{Vmatrix}$. Найдем образ вектора **x** = {-2; 3}. По определению образ вектора **x** есть вектор **y** $= \hat{A}$**x**. Сопоставим выражению $\hat{A}$**x** произведение матриц A и X. Вычислим

$$A \cdot X = \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -13 \\ 5 \end{Vmatrix}$$

В соответствии с вычислениями координаты вектора **y** = {-13; 5}.

<u>Возведение матрицы в натуральную степень</u>

Прежде всего, отметим, что действие возведения в степень может быть определено только для квадратной матрицы. Поскольку для числа a возведение в целую положительную степень n означает последовательное умножении его самого на себя, то распространение этого правила на матрицы приводит к требованию совпадения числа строк и столбцов (в противном случае матрицы нельзя будет перемножить). Тогда можно сформулировать следующее определение:

- Целой положительной степенью A^n квадратной матрицы A называется последовательное произведение n матриц, т.е. выражение вида

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$$

Естественно, что при возведении в степень получается квадратная матрица того же порядка, что и A.

v *<u>Пример21</u>* . Пусть дана матрица $A = \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Найти A^3.

Необходимые вычисления элементарны и не требуют пояснений:

$$A^3 = \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что в данном примере каждое умножение матрицы на себя приводит к увеличению на 1 коэффициента при a_{12}, а остальные её элементы не изменяются. Пользуясь методом математической индукции, можно доказать, что $\left(\begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right)^m = \begin{Vmatrix} 1 & mn \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Отталкиваясь от определения, легко показать, что действие возведения матрицы в натуральную степень подчиняется тем же законам, что и возведение в степень чисел, в частности

$$A^{m+n} = A^m \cdot A^n; \qquad \left(A^n\right)^m = A^{n\cdot m}.$$

- Нулевой степенью A^0 квадратной матрицы A называется единичная матрица того же порядка.

<u>*Замечание:*</u> *Действие возведения матрицы в степень позволяет по аналогии с обычными функциями формально ввести понятие функции от квадратной матрицы, опираясь на представление функций бесконечными степенными рядами. Например, отталкиваясь от представления экспоненты e^x разложением её в ряд вида*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots,$$

для любой квадратной матрицы A можно определить e^A выражением

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots .$$

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Какие матрицы можно складывать?
2. Какие матрицы можно перемножать?
3. Вычислить $3A - B^T$, если $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{Vmatrix}; B = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$.
4. Сформулируйте правило умножения матриц.
5. Как определить размер матрицы-произведения?
6. Вычислить A^4, если $A = \begin{Vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$.
7. Вычислить произведения AB и BA, если $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}; B^T = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

8. Даны матрицы: $A=\begin{Vmatrix}2 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{Vmatrix}$; $B=\begin{Vmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{Vmatrix}$; $C=\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & 2\end{Vmatrix}$;

$$D=\begin{Vmatrix}3 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{Vmatrix};\quad E=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix};\quad F=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 4\end{Vmatrix}.$$

Установить, какие из произведений AB, BA, ABCE, ABEC, AC, CA, DC, CD, BE, EF, FE существуют, и определить их размер.

9. Найти произведения матриц AB, BA, AC, DC, FE, перечисленных в предыдущем задании.

10. Вычислить функцию f(A), если функция задана выражением вида $f(x)=2x^0 - 3x + x^2$, а матрица $A=\begin{Vmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{Vmatrix}$.

§ 11. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

ЯДРО И ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА

Для любого линейного оператора $\hat{A}$ в силу его линейности $\hat{A}$q = q.

- Линейный оператор $\hat{A}$, для которого $\hat{A}\mathbf{x}$ = q тогда и только тогда, когда **x** = q, называется невырожденным.
- Если в линейном пространстве R найдется такой ненулевой вектор **x**, что $\hat{A}\mathbf{x}$ = q, то оператор $\hat{A}$ называется вырожденным.

Ø **Теорема:** Для того, чтобы линейный оператор был невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы детерминант его матрицы был отличен от нуля.

Для доказательства заметим, что выражение $\hat{A}\mathbf{x}$ = q эквивалентно однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (13),$$

где a_{ik} - элементы матрицы A оператора $\hat{A}$, а x_k - координаты вектора **x**. По определению, оператор $\hat{A}$ будет невырожденным, если указанная система уравнений (13) будет иметь единственное тривиальное решение, а для этого необходимо и достаточно, чтобы главный определитель системы, равный DetA, был отличен от нуля. Что и требовалось доказать.

Легко понять, что всякий невырожденный оператор является взаимно однозначным, т.е. одинаковым образам, порожденным таким оператором, соответствуют одинаковые векторы-прообразы. Напротив, вырожденный оператор неоднозначен: в этом случае один и тот же образ может иметь разные прообразы.

- Множество образов векторов линейного пространства, порождаемое конкретным оператором, называется областью значений данного оператора.

Очевидно, что областью значений оператора может быть как все линейное пространство, так и некоторая его часть.

- Ядром линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве R, называется множество всех элементов **x** этого пространства, для которых $\hat{A}\mathbf{x}$ = q.

Для обозначения ядра оператора $\hat{A}$ служит символ KerA.

Вполне очевидно, что для невырожденного оператора ядро состоит из одного нулевого вектора, а областью значений оператора является все линейное пространство.

Напротив, ядро вырожденного оператора содержит более одного элемента, причем и ядро, и область значений такого оператора являются линейными подпространствами того пространства, в котором действует оператор.

§ 12. ОБРАЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

- Оператор $\hat{A}^{-1}$ называется обратным для оператора $\hat{A}$, если $\hat{A}\cdot\hat{A}^{-1}=\hat{A}^{-1}\cdot\hat{A}=\hat{E}$, где $\hat{E}$ - тождественный оператор.

Действие оператора $\hat{A}^{-1}$ состоит в том, что он "возвращает на свои места" элементы, преобразованные оператором $\hat{A}$, так что если $\hat{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}$, то $\hat{A}^{-1}\mathbf{y}=\mathbf{x}$. В силу отождествления оператора и матрицы обратному оператору соответствует матрица, которая также называется обратной.

- Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A порядка n, если $A\cdot A^{-1}=E$, где E – единичная матрица того же порядка.

<u>*Замечание.*</u> *Обращение является взаимной операцией: для матрицы A^{-1} обратной будет матрица A.*

Ø **<u>Теорема</u>**: Для любой невырожденной матрицы A существует обратная ей матрица A^{-1}.

Докажем это. Одновременно в ходе доказательства будет получен один из алгоритмов нахождения обратной матрицы. Для простоты ограничимся случаем матрицы третьего порядка. Пусть имеется невырожденная матрица

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

Из алгебраических дополнений данной матрицы A составим вспомогательную матрицу и транспонируем её:

$$S = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix}$$

- Матрица S, полученная транспонированием матрицы, составленной из алгебраических дополнений исходной матрицы A, называется союзной или присоединённой к A.

Рассмотрим произведение матриц A и S:

$$A \cdot S = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix}.$$

При выполнении умножения (по правилу "строка на столбец") используем известные свойства определителя: определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на соответствующие алгебраические дополнения, а сумма произведений элементов некоторой строки на алгебраические дополнения, соответствующие элементам другой строки, равна нулю. В результате получим цепочку равенств:

$$A \cdot S = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}A_{2k} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}A_{3k} \\ \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}A_{2k} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}A_{3k} \\ \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}A_{2k} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}A_{3k} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{Vmatrix} = \det A \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \det A \cdot E$$

Сопоставляя полученный результат $A \cdot S = \det A \cdot E$ с выражением $A \cdot A^{-1} = E$, можно сделать вывод, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot S \qquad (14).$$

Так как по условию $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует, а формула (14) позволяет вычислить её элементы.

v *Пример 22:* Найдем матрицу, обратную данной. Предварительно убедимся, что матрица A невырожденная, затем составим союзную матрицу и воспользуемся формулой (14).

$$A=\begin{Vmatrix}1&1&1\\3&-1&-5\\1&1&3\end{Vmatrix};\qquad \det A=-8\neq 0;\qquad S=\begin{Vmatrix}2&-2&-4\\-14&2&8\\4&0&-4\end{Vmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot S=\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\begin{Vmatrix}2&-2&-4\\-14&2&8\\4&0&-4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-1/4&1/4&1/2\\7/4&-1/4&-1\\-1/2&0&1/2\end{Vmatrix}$$

После вычисления элементов обратной матрицы рекомендуется проконтролировать правильность результата непосредственной проверкой соотношения $A\cdot A^{-1}=E$, что предоставляется в качестве упражнения читателю.

Ещё один широко распространенный метод вычисления элементов обратной матрицы основан на том, что если существует преобразование, переводящее данную матрицу A в единичную матрицу E, то это же преобразование переводит единичную матрицу в матрицу A^{-1}, обратную A. Техника вычислений заключается в том, что рядом с данной матрицей A выписывается единичная матрица того же порядка, а затем элементарными преобразованиями строк обеих матриц исходную матрицу стремятся превратить в единичную. Если эта задача разрешима, то в итоге на месте первоначально записанной единичной матрицы окажется матрица A^{-1}, обратная A. Поясним сказанное примером.

v *Пример 23:* Найдем матрицу, обратную приведенной в предыдущем примере с помощью элементарных преобразований строк.

Прежде всего выпишем справа рядом с исходной единичную матрицу, для удобства отделяя её элементы от данной матрицы вертикальной чертой. Идея заключается в том, чтобы на каждом этапе одновременного последовательного преобразования матриц превращать в нули все элементы данного столбца левой матрицы, за исключением стоящего на её главной диагонали. В данном случае было проделано следующее. На первом этапе к элементам 2-ой строки прибавили элементы 1-ой, умноженные на (-3), а из 3-ей строки вычли 1-ю. На втором этапе разделили 2-ю строку на 4, а также прибавили результат деления к 1-ой строке. На третьем этапе ко 2-ой строке прибавили 3-ю, а к 1-ой прибавили последнюю, предварительно разделив её на 2. На четвертом этапе умножили 2-ю строку на (-1), а 3-ю разделили на 2. Цепочка описанных преобразований приводится ниже.

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & -7/4 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right\|$$

В результате левая матрица трансформировалась в единичную, а правая – в матрицу A^{-1}, обратную А. Легко убедиться, что результаты расчетов полностью совпадают с полученными в предыдущем примере, однако объём вычислений в последнем случае меньше.

В заключение отметим, что наряду с продемонстрированными выше методами существуют и другие способы вычисления элементов обратной матрицы.

<u>*Замечание:*</u> *Понятие обратной матрицы позволяет распространить действие возведения матрицы в степень на любые целые отрицательные показатели. Например, можно считать, что* $A^{-3} = (A^{-1})^3 = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}$.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. В чем состоит действие обратного оператора?
2. Для какой матрицы существует понятие обратной?

3. Для матрицы $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$ найти обратную. Правильность вычислений проверить умножением.

4. Какие методы вычисления элементов обратной матрицы Вы знаете?

5. Какая матрица называется особенной?

6. Найти A^{-2}, если известно, что $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{Vmatrix}$

§ 13. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим совместную систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (15)$$

- Основной матрицей системы линейных уравнений называется матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных.

Обозначив основную матрицу системы через A, столбец из неизвестных - X, а столбец свободных членов - B, можно записать систему уравнений (7) в эквивалентной форме A·X = B, что в развернутом виде даст:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix} \qquad (16)$$

Выражение (16) является простейшим примером так называемого матричного уравнения.

- Матричным уравнением будем называть уравнение вида $A \cdot X = B$, $X \cdot A = B$ или $A \cdot X \cdot C = B$, где A, B, C - данные матрицы, а X - неизвестная матрица.

<u>*Замечание.*</u> *Существуют и более сложные матричные уравнения, но мы ограничимся рассмотрением указанных выше трёх типов.*

Решение матричных уравнений такого вида формально выглядит очень просто и сводится к умножению на соответствующую обратную матрицу (разумеется, если она существует).

Например, умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, получим

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Учитывая, что $A^{-1} \cdot A \cdot X = E \cdot X = X$, имеем право записать:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (17)$$

Для решения уравнения $X \cdot A = B$ нужно умножить обе его части на A^{-1} справа. Тогда получим $X = B \cdot A^{-1}$.

Для решения уравнения $A \cdot X \cdot C = B$ надо умножить обе его части на A^{-1} слева и на C^{-1} справа. В результате получим: $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

v <u>*Пример 24.*</u> Решим матричное уравнение: $X \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 8 \end{Vmatrix}$.

Это уравнение вида $X \cdot A = B$. Его решение $X = B \cdot A^{-1}$. Так как $\mathrm{Det}A = 1 \neq 0$, то существует обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Решение уравнения $X = B \cdot A^{-1} = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 & -17 \\ -6 & 20 \end{Vmatrix}$.

<u>Решение невырожденных систем линейных уравнений</u>

- Система уравнений (15) называется невырожденной, если детерминант её основной матрицы отличен от нуля.

Вернёмся к матричной форме записи системы (15) в виде $A \cdot X = B$. Так как по условию матрица A системы (15) невырожденная и, следовательно, имеет обратную, решением уравнения $A \cdot X = B$ будет $X = A^{-1} \cdot B$.
В результате умножения квадратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец B получим матрицу-столбец C. Матрицу C часто называют вектор-решением системы уравнений (15), так как после подстановки чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каждое из уравнений системы (15) обращается в верное равенство.

Происхождение названия "вектор-решение" связано с тем, что матричное уравнение $A \cdot X = B$ можно рассматривать как пример применения оператора $\hat{A}$ с матрицей A к некоторому неизвестному n-мерному вектору $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, образом которого является известный вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. В этом случае $A \cdot X = B$ есть матричная запись выражения $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, а задача решения системы уравнений (15) сводится к задаче отыскания прообраза вектора **b** при известном виде оператора преобразования $\hat{A}$.

v *Пример 25*. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 4. \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

В матричной форме: $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{Vmatrix} \qquad (18).$$

Так как $\det A = -8 \neq 0$, основная матрица этой системы имеет обратную A^{-1}, которая (см. пример 23) имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 7/4 & -1/4 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{Vmatrix}.$$

Решение матричного уравнения (18) можно найти матричным способом:

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{Vmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 7/4 & -1/4 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, решение исходной системы уравнений имеет вид:

$$x_1 = 2;\ \ x_2 = -3;\ \ x_3 = 1.$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений особенно удобен, когда требуется решить несколько систем с одинаковыми левыми частями, так как основная трудность при таком методе заключается в вычислении самой обратной матрицы.

Матричный вывод формул Крамера

Можно показать, что в развёрнутом виде из матричной записи (17) решения системы уравнений непосредственно получаются известные формулы Крамера:

$$x_i = \Delta_{x_i} \big/ \Delta$$

Действительно, так как $X=A^{-1}\cdot B$ и $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot S$, то:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}.$$

В силу этого равенства для произвольного неизвестного x_i можно записать:

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n) \tag{19}$$

Легко видеть, что выражение в скобках в этой формуле есть разложение по i-му столбцу вспомогательного определителя Δ_{xi}, полученного из главного определителя системы $\Delta = \det A$ заменой i-го столбца столбцом свободных членов. Поэтому (19) можно записать в виде: $x_i=\Delta_{xi}/\Delta$.

Рассмотренные методы решения систем линейных уравнений применимы, очевидно, только тогда, когда число уравнений системы равно числу неизвестных и, кроме того, система является невырожденной. Однако матричные методы можно использовать и в более сложных случаях. Более того, решение любой совместной системы линейных уравнений может быть найдено методами линейной алгебры, и те же методы используются для выяснения совместности системы.

Теорема Кронекера-Капелли

Пусть имеется m линейных уравнений с n неизвестными, причём необязательно m = n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (20)$$

Введём новое понятие.

- Расширенной матрицей системы линейных уравнений называется матрица $\tilde{A}$, которая получается из основной матрицы системы A добавлением столбца свободных членов (для удобства условимся отделять этот столбец от остальных элементов матрицы вертикальной чертой):

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\| \qquad (21).$$

Критерием совместности системы линейных уравнений служит теорема Кронекера-Капелли.

Ø **Теорема:** Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг её основной матрицы был равен рангу расширенной.

Докажем необходимость. Пусть система (20) совместна, т.е. существует хотя бы один набор таких чисел c_1, c_2, …, c_n, что $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k = b_i$, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Запишем расширенную матрицу $\tilde{A}$ системы уравнений (20).

Ранг $\tilde{A}$ не изменится, если вычесть из элементов последнего столбца элементы первого столбца, умноженные на c_1, элементы второго, умноженные на c_2, … и, наконец, элементы n-го столбца, умноженные на c_n.

В результате получим:

$$\tilde{A}=\left\|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1-\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot c_k \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2-\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}\cdot c_k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n-\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}\cdot c_k \end{array}\right\|$$

Но по условию $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}c_k = b_i$, поэтому последний столбец полученной матрицы нулевой, в силу чего $Rg\tilde{A} = RgA$. Что и требовалось доказать.

<u>Докажем</u> теперь <u>достаточность</u> теоремы. Пусть $Rg\tilde{A} = RgA = r$. Будем считать, для определённости, что базисный минор матрицы A расположен в левом верхнем углу её (в противном случае элементарными преобразованиями матрицу A всегда можно привести к такому виду). Тогда первые r строк матрицы $\tilde{A}$ линейно независимы (они базисные), а остальные (m - r) согласно теореме о базисном миноре являются их линейными комбинациями. Это значит, что первые r уравнений системы (20) независимы, а остальные являются их следствиями. Назовём базисными или главными неизвестными те r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные, если они есть, назовём свободными. Понятно, что выбор главных неизвестных неоднозначен, так как базисный минор может быть выбран не единственным образом, однако число их для данной системы строго определено и равно r. Из определения ранга матрицы следует, что $r \le n$.

Напомним, что две системы линейных уравнений с n неизвестными называют эквивалентными или равносильными, если каждое решение одной из них одновременно является решением для другой, и наоборот – каждое решение второй является решением первой.

Рассмотрим случай r = n. Тогда система (20) может быть заменена равносильной ей системой, состоящей из первых r уравнений. Единственное решение этой системы может быть найдено, например, по формулам Крамера. Если r < n, то систему (20) можно заменить ей эквивалентной, перенеся свободные неизвестные в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим бесконечное число решений исходной системы (20). Каждое из этих решений, получаемое при конкретном выборе свободных неизвестных, называется частным решением системы (20).

Следствия теоремы Кронекера-Капелли

На основании теоремы Кронекера-Капелли можно сделать следующие практические выводы:

1. Если $Rg\tilde{A} \neq RgA$, то система несовместна.

2. Если $Rg\tilde{A} = RgA = n$, где n - число неизвестных, то система имеет единственное решение (все неизвестные главные).

3. Если $Rg\tilde{A} = RgA < n$, система имеет бесчисленное множество решений (есть свободные неизвестные).

4. Однородная система уравнений всегда совместна.

5. Однородная система имеет единственное нулевое решение, если ранг её матрицы равен числу неизвестных.

6. Для того, чтобы однородная система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы RgA был меньше числа неизвестных n.

<u>Структура общего решения системы линейных уравнений</u>

- Назовем однородной системой уравнений, соответствующей данной системе (20) систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Фактически (22) это та же система (20), где все b_i=0. Тогда справедлива

Ø **<u>Теорема:</u>** Общее решение неоднородной системы линейных уравнений может быть представлено в виде суммы некоторого (безразлично какого) частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей ей однородной системы.

Для доказательства достаточно убедиться в справедливости двух утверждений:

1). Сумма любого решения неоднородной системы (20) с любым решением соответствующей ей однородной системы (22) является решением системы (20).

2). Разность двух произвольных решений неоднородной системы (20) является решением соответствующей ей однородной системы (22).

Для сокращения записи представим системы (20) и (22) в матричной форме как $AX = B$ и $AX = \Theta$ соответственно. Пусть C - произвольное вектор-решение система (20), а D - общее вектор-решение системы (22), тогда их сумма (C+D) является вектор-решением системы (20), так как

$$A(C + D) = AC + AD = B + \Theta = B.$$

Обратно, если C_1 - некоторое фиксированное вектор-решение системы (20), а C - какое-либо произвольное её вектор-решение, то разность $(C - C_1)$ является вектор-решением системы (22). Действительно,

$$A(C - C_1) = AC - AC_1 = B - B = \Theta.$$ Теорема доказана.

Практическую пользу теоремы о структуре общего решения системы линейных уравнений можно продемонстрировать на следующем примере.

v *Пример 26.*

Рассмотрим систему: $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_3 = 12 \end{cases} \qquad (23).$$

Легко убедиться, что она не может быть решена по методу Крамера, т.к. её главный определитель и все вспомогательные равны нулю. Таким образом, система является неопределённой, т.е. может иметь либо бесчисленно много решений, либо ни одного.

Можно заметить, что набор {2; -1; 3} является решением системы (23). Но в таком случае существует бесконечно много её решений. Попытаемся их найти. Для этого составим однородную систему, соответствующую данной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad (24).$$

Так как её определитель равен нулю, то она сводится, как известно, к системе двух уравнений (например, первого и второго):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Общее решение этой новой системы двух уравнений, которая эквивалентна системе (24), можно найти по известной формуле $x_k = (-1)^{(k+1)} \cdot t \cdot \det(a_{ij})$, где t – параметр (произвольное число), а j ≠ k. Таким образом

$$x_1 = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2t; \quad x_2 = -t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = t; \quad x_3 = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3t\,.$$

Согласно доказанной теореме о структуре общего решения неоднородной системы общее решение системы (23) может быть записано в виде

$$x_1 = 2 + 2t; \;\; x_2 = -1 + t; \;\; x_1 = 3 - 3t\,.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при любом значении параметра t данное решение удовлетворяет исходной системе (23).

Фундаментальная система решений

Пусть дана однородная система m уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (25),$$

о которой известно, что ранг её матрицы A равен r, причём r < n. Будем считать, для определённости, что базисный минор матрицы A расположен в левом верхнем углу её (в противном случае систему и её матрицу всегда можно привести к такому виду). Тогда система (25) может быть заменена равносильной ей системой, состоящей из первых r уравнений. В этой системе первые r неизвестных являются главными, а остальные – свободными.

Перенося свободные неизвестные в правую часть уравнений, получим эквивалентную систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathbf{K} + a_{1r}x_r = -a_{1(r+1)}x_{r+1} - a_{1(r+2)}x_{r+2} - \mathbf{K} - a_{1n}x_n \\ \mathbf{KKK} = \mathbf{KK} \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \mathbf{K} + a_{rr}x_r = -a_{r(r+1)}x_{r+1} - a_{r(r+2)}x_{r+2} - \mathbf{K} - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (26).$$

Если дать переменным $x_{(r+1)}$, $x_{(r+2)}$, …, x_n какие-нибудь фиксированные числовые значения $c_{(r+1)}$, $c_{(r+2)}$, …, c_n, получим систему r уравнений с r неизвестными, главный определитель которой отличен от нуля (его элементы образуют базисный минор матрицы A). Такая система имеет, как известно, единственное решение. Поскольку выбор значений $c_{(r+1)}$, $c_{(r+2)}$, … c_n, очевидно, произволен, то можно утверждать, что каждому конкретному набору чисел $c_{(r+1)}$, $c_{(r+2)}$, …, c_n однозначно соответствует некоторое конкретное вектор-решение системы (25) вида $\mathbf{u_k} = \{x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{rk}, c_{(r+1)}, \ldots, c_n\}$. Индекс k неизвестного x_{ik} может принимать значения от 1 до (n-r) включительно в соответствии с конкретным набором $c_{(r+1)}$, $c_{(r+2)}$, …, c_n.

Рассмотрим наборы $c_{(r+1)}$, $c_{(r+2)}$, …, c_n вида: $\begin{cases} 1; & 0; & ...; & 0 \\ 0; & 1; & ...; & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0; & 0; & ...; & 1 \end{cases}$

(очевидно, что вместо единиц в таком наборе могут фигурировать произвольные числа, отличные от нуля). Этим наборам будут соответствовать вектор-решения системы (25) вида

$$\begin{cases} u_1 = \{x_{11};...;x_{r1};1;0;...;0\} \\ u_2 = \{x_{12};...;x_{r2};0;1;...;0\} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ u_{(n\text{-}r)} = \{x_{1(n\text{-}r)};x_{r(n-r)};0;0;...;1\} \end{cases} \qquad (27).$$

Легко убедиться, что вектор-решения $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …$\mathbf{u_{(n\text{-}r)}}$ образуют базис линейного пространства решений системы (25). Для этого достаточно показать, во-первых, что векторы $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …$\mathbf{u_{(n\text{-}r)}}$ линейно независимы, а во-вторых, что каждое решение $\mathbf{u} = \{x_1; x_2; …; x_r; …; x_n\}$ системы (25) есть линейная комбинация решений (27).

Для доказательства линейной независимости векторов (27) запишем их линейную комбинацию, равную нулевому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{u_1} + \lambda_2\,\mathbf{u_2} + … + \lambda_{(n\text{-}r)}\,\mathbf{u_{(n\text{-}r)}} = \mathbf{\Theta}.$$

Рассматривая (r+1)-ю, (r+2)-ю, … и n-ю координаты этого векторного равенства, получим систему (n-r) уравнений

$$\begin{cases} l_1\cdot 1 + l_2\cdot 0 + ... + l_{(n\text{-}r)}\cdot 0 = 0 \\ l_1\cdot 0 + l_2\cdot 1 + ... + l_{(n\text{-}r)}\cdot 0 = 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ l_1\cdot 0 + l_2\cdot 0 + ... + l_{(n\text{-}r)}\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что данная система имеет только тривиальное решение, в силу чего векторы $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …$\mathbf{u_{(n\text{-}r)}}$ следует считать линейно независимыми.

- Любая совокупность (n-r) линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений (25) называется её фундаментальной системой решений.

Докажем, что любое вектор-решение $\mathbf{u} = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_r;\ \ldots;\ x_n\}$ системы (25) может быть представлено в виде $\mathbf{u} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{u_2} + \ldots + \alpha_{(n-r)} \cdot \mathbf{u_{(n-r)}}$. (Именно в этом и заключается смысл введения понятия фундаментальной системы решений).

Рассмотрим вектор $\mathbf{u_0} = \mathbf{u} - x_{(r+1)} \cdot \mathbf{u_1} - x_{(r+2)} \cdot \mathbf{u_2} - \ldots - x_n \cdot \mathbf{u_{(n-r)}}$.

Очевидно, что все координаты этого вектора, начиная с (r+1)-й и кончая n-й, равны нулю, т.е. $\mathbf{u_0} = \{\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_r;\ 0;\ \ldots;\ 0\}$. С другой стороны, вектор $\mathbf{u_0}$ является вектор-решением системы (25), т.к. представляет собой линейную комбинацию вектор-решений этой системы. Это означает, что после подстановки координат вектора $\mathbf{u_0}$ в систему уравнений (25) придём к однородной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = 0 \end{cases},$$

которая имеет единственное тривиальное решение в силу того, что её главный определитель, равный базисному минору исходной системы (25), отличен от нуля. А это как раз и означает, что произвольное вектор-решение системы (25) $\mathbf{u} = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_r;\ \ldots;\ x_n\}$ может единственным способом представлено в виде линейной комбинации вектор-решений (27), образующих фундаментальную систему, что и требовалось доказать.

Конкретный пример нахождения фундаментальной системы решений можно найти в §17 настоящего пособия.

<u>Понятие о методе Гаусса</u>

Одним из наиболее распространённых методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Метод имеет много вариантов, однако в любом случае суть его состоит в следующем: выписывается расширенная матрица системы $\widetilde{A}$, которая с помощью элементарных преобразований приводится к такому виду, из которого решение системы видно непосредственно (обычно стремятся получить ступенчатую матрицу). С помощью таких преобразований всякий раз получается расширенная матрица новой системы, равносильной исходной. Равносильность новой и исходной систем станет очевидной, если учесть, что элементарные преобразования матрицы соответствуют просто линейным комбинациям уравнений.

Процесс приведения основной матрицы системы к ступенчатому виду часто называют прямым ходом метода Гаусса.

Обратный ход метода Гаусса состоит в том, что для упрощенной матрицы записывают систему уравнений, которая будет эквивалентна исходной системе, и, продвигаясь от последнего уравнения к первому, вычисляют значения всех неизвестных.

Можно предложить следующий алгоритм реализации метода Гаусса:

1. Записать расширенную матрицу системы
2. Пронумеровать её столбцы, поставив над каждым из них номер неизвестного
3. Если $a_{11} = 0$, поменять местами строки или столбцы, не забывая о их нумерации.
4. Если $a_{11} \neq 0$, домножить первую строку на $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ и прибавить её ко всем последующим i строкам. В результате все элементы первого столбца (кроме a_{11}) будут равны нулю.
5. Действуя по аналогии с пунктами 3 и 4 (с очевидной заменой a_{11} на a_{kk} и a_{i1} на a_{ik}), привести матрицу к ступенчатому виду.

6. Записать систему уравнений, соответствующую преобразованной (ступенчатой) матрице и проанализировать её на предмет совместности.

<u>Замечание</u>: при реализации прямого хода метода Гаусса возможны следующие случаи:

а). Если в ходе преобразований окажется, что в какой-либо строке матрицы все элементы, кроме последнего, нули, то система несовместна.

б.) Если в упрощённой матрице число столбцов без учета последнего равно числу строк (т.е. число неизвестных равно числу уравнений), то система имеет единственное решение.

в.) Если в упрощенной матрице число столбцов без учёта последнего больше числа строк (т.е. неизвестных больше, чем уравнений), то система имеет бесконечно много решений. Выделяя базисный минор, можно выбрать главные неизвестные, тогда оставшимся (свободным) неизвестным можно придавать произвольные значения.

Этим действием завершается прямой ход метода Гаусса.

7. Если система совместна, то выбрать главные неизвестные (их коэффициенты образуют базисный минор) и обозначить через параметры свободные неизвестные (если они есть).

8. Продвигаясь от последнего уравнения к первому, найти общее решение системы.

Два последних пункта изложенного алгоритма реализуют обратный ход метода Гаусса.

∨ <u>*Пример 27.*</u> Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases} \qquad (28)$$

Составим расширенную матрицу $\tilde{A}$ и проведём с её строками элементарные преобразования, приводящие матрицу к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & -6 & 6 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 & 6 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -22 \end{array} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

Здесь с матрицей были последовательно проделаны следующие операции: на первом шаге умножили первую строку на a_{i1} и вычли её из всех последующих, на втором - умножили вторую строку на a_{i3} и вычли её из всех последующих, на третьем - исключили одну из пропорциональных строк (четвёртую), а третью разделили на (-10). Выделим в полученной в результате упрощений матрице базисный минор, в качестве которого можно взять определитель, составленный из элементов 2-го, 3-го и 4-го столбцов. Это означает, что за главные неизвестные приняты x_2, x_3 и x_4. Получившаяся в результате преобразований матрица соответствует системе (29), равносильной исходной системе уравнений (28):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_4 = 1 \end{cases} \tag{29}$$

Из (29) немедленно следует, что $x_4 = 1$; $x_3 - 2x_4 = -4$; => $x_3 = -2$;

$$x_1 + x_2 - 2 + 1 = 0; \Rightarrow x_2 = (1 - x_1).$$

Обозначив свободное неизвестное x_1 за t, получим общее решение в виде:

$$x_1 = t;\ x_2 = 1 - t;\ x_3 = -2;\ x_4 = 1.$$

Разобранный метод без всяких изменений переносится и на тот случай, когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Замечание: Кроме рассмотренного варианта метода Гаусса к настоящему времени разработано большое число численных методов реше-

ния систем линейных уравнений, с частью которых можно ознакомиться по приведенному списку рекомендуемой литературы.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Что такое вектор-решение?
2. С помощью обратной матрицы найти решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

3. Какие неизвестные называются свободными?
4. Что такое общее решение системы и в чем его отличие от частного?
5. Какая система линейных уравнений задает на плоскости три различные прямые, проходящие через одну точку?
6. Какая система линейных уравнений задает на плоскости три различные прямые, образующие треугольник?
7. Какая система линейных уравнений задает три попарно пересекающиеся плоскости, не имеющие общих точек?
8. Рассмотрите все возможные случаи, которые могут встретиться при решении системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными и попробуйте дать им геометрическую интерпретацию.
9. Решить системы уравнений методом Гаусса:

а). $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -7 \end{cases}$$

б). $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

10. Найти фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

§ 14. ПЕРЕХОД В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ К НОВОМУ БАЗИСУ

Пусть в пространстве R_n имеются два базиса: $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ и $\{\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}\}$. Будем условно называть первый базис старым, а второй - новым. Каждый из новых базисных векторов $\mathbf{e'_k}$ можно разложить по старому базису, т.е. представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$:

$$\begin{cases} \mathbf{e'_1} = a_{11}\mathbf{e_1} + a_{21}\mathbf{e_2} + \ldots + a_{n1}\mathbf{e_n} \\ \mathbf{e'_2} = a_{12}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2} + \ldots + a_{n2}\mathbf{e_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e'_n} = a_{1n}\mathbf{e_1} + a_{2n}\mathbf{e_2} + \ldots + a_{nn}\mathbf{e_n} \end{cases} \tag{30}$$

Соотношения (30) можно кратко записать в виде:

$$\mathbf{e'_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e_i}, \text{ где } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{31}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x} \in R_n$. В старом базисе

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e_i}\,. \tag{32}$$

В новом базисе тот же самый вектор:

$$\mathbf{x} = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\} = \sum_{i=1}^{n} x'_k \mathbf{e'_k}\,. \tag{33}$$

Заменяя вектор $\mathbf{e'_k}$ в формуле (33) его разложением по старому базису в виде линейной комбинации векторов (31), получим:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x'_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e_i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x'_k a_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_k \right) \cdot \mathbf{e}_i$$

Сравнивая полученное выражение с (32), можно заметить, что выражение в скобках представляет собой «старые» координаты x_i вектора $\mathbf{x}$, так что можно записать

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_k, \qquad \text{i=1,2,…,n}$$

или в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n \end{cases} \tag{34}$$

Система (34) уравнений преобразования может быть записана в виде матричного уравнения

$$\mathrm{X} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{X}', \tag{35}$$

где приняты обозначения: $\mathrm{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$, $\mathrm{X}' = \begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{Vmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$.

Матрица С называется матрицей перехода от старого базиса к новому.

Теперь можно сформулировать

- **<u>Правило</u>:** Чтобы составить матрицу перехода от старого базиса к новому, нужно в соответствующие столбцы поставить координаты новых базисных векторов в старом базисе. Тогда строки матрицы дадут коэффициенты в формулах перехода.

Формула (35) позволяет выразить «старые» координаты вектора через «новые». Обратная задача может быть решена умножением слева матричного уравнения (35) на матрицу C^{-1}, в результате чего получается уравнение (36), позволяющее выразить «новые» координаты вектора через «старые»:

$$\mathrm{X}' = \mathrm{C}^{-1} \cdot \mathrm{X} \tag{36}$$

Матрица C^{-1} всегда существует, так как матрица перехода С обладает следующим свойством:

- Ранг матрицы перехода равен размерности пространства, а определитель, составленный из её элементов, отличен от нуля.

Это свойство становится очевидным, если учесть, что в силу линейной независимости базисных векторов система уравнений преобразования (34) имеет единственное решение и поэтому RgC равен числу базисных векторов, т.е. размерности пространства. Это единственное решение может быть найдено, например, по формулам Крамера $x'_k = \Delta_{x_k}/\Delta$, где главный определитель системы $\Delta = \det C \neq 0$.

Понятно, что при переходе к новому базису изменяются не только координаты векторов, но и матрицы операторов. Пусть в линейном пространстве R_n с базисом $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ задан оператор $\hat{A}$ с матрицей A. Осуществим переход к новому базису $\{\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}\}$ и выведем формулу, позволяющую находить матрицу A′ этого оператора $\hat{A}'$ в новом базисе. Пусть образом некоторого произвольного вектора **x** при воздействии на него оператора $\hat{A}$ является вектор **y**, т.е. $\hat{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}$. Обозначим через X и Y столбцовые матрицы, составленные из координат векторов **x** и **y** в старом базисе. Тогда из операторного равенства $\hat{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}$ следует матричное уравнение: $A \cdot X = Y$. При переходе к новому базису матрицы A, X и Y изменятся соответственно на A′, X′ и Y′. По аналогии можно записать $\hat{A}'\mathbf{x}'=\mathbf{y}'$ => $A' \cdot X' = Y'$.

Составим матрицу перехода C и найдем координаты вектора **y** в новом базисе. Тогда $Y' = C^{-1} \cdot Y$, но так как $A \cdot X = Y$, а $X = C \cdot X'$, получаем цепочку равенств:

$$Y' = C^{-1} \cdot Y = C^{-1} \cdot A \cdot X = C^{-1} \cdot A \cdot C \cdot X'.$$

Сопоставляя полученное выражение с матричным уравнением $A' \cdot X' = Y'$, можно сделать вывод, что

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C \qquad (37)$$

Формула (37) позволяет найти матрицу A′ оператора в новом базисе, если известны матрица A этого оператора в старом базисе и сама матрица перехода C.

v *Пример 28.* Пусть в пространстве R_2 переход от старого базиса к новому задаётся формулами: $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \end{cases}$

а матрица A оператора $\hat{A}$ имеет в старом базисе вид: $A = \begin{Vmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{Vmatrix}$. Составим матрицу перехода $C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

Так как $C^{-1} = \dfrac{1}{\det C} \cdot S$, $\det C = -1$, а $S = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$, то $C^{-1} = \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$.

Тогда согласно формуле (37) получим:

$$A' = \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -6 & 4 \\ 6 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Из формулы (37) следует, что детерминант матрицы линейного оператора не зависит от базиса. Действительно, так как $A' = C^{-1} \cdot A \cdot C$, то

$$\det A' = \det(C^{-1} \cdot A \cdot C) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A .$$

Для перехода от старого базиса к новому в линейном пространстве R_n необходимо задать упорядоченную совокупность n новых линейно независимых векторов. Когда же система n векторов будет линейно независимой? На этот вопрос отвечает

Ø **<u>Теорема:</u>** Для того, чтобы исследовать линейную зависимость векторов, заданных своими координатами, нужно найти ранг матрицы, составленной из этих координат. Если ранг матрицы равен количеству данных векторов, то векторы линейно независимы, если же ранг матрицы меньше количества векторов, то они линейно зависимы.

<u>Доказательство</u>: Пусть даны m векторов **x**, **y**, … **z**, принадлежащих пространству R_n. Если число векторов m больше размерности пространства n , то они по определению размерности линейно зависимы. Если же $m \le n$, то векторы будут линейно независимы тогда, когда условие

$$\alpha_1\,\mathbf{x}+\alpha_2\,\mathbf{y}+\mathbf{K}+\alpha_m\,\mathbf{z}=\mathbf{и} \tag{38}$$

выполняется только при одновременном обращении в нуль всех коэффициентов α_i. Известные координаты векторов позволяют записать это векторное равенство в виде системы n уравнений с m неизвестными $a_1, a_2, ..., a_m$ (причём m≤n).

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + ... + \alpha_m z_1 = 0 \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m z_2 = 0 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n + ... + \alpha_m z_n = 0 \end{cases}$$

Эта однородная система имеет единственное тривиальное решение $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$ только в том случае, когда RgA=m, т.е. ранг её матрицы равен числу неизвестных. Что и требовалось доказать.

Замечание: Как следует из доказательства, теорема справедлива для любого числа векторов.

Контрольные вопросы и задания:

1. Как составить матрицу перехода к новому базису?
2. Дана упорядоченная совокупность n векторов n-мерного пространства. Как проверить, можно ли составить из этих векторов базис?
3. Найти координаты вектора $\mathbf{x} = 6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ в новом базисе: $\{ \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 ;\ \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 ;\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \}$.
4. Каким свойством обладает матрица перехода к новому базису?
5. Как меняется детерминант матрицы линейного оператора при переходе к новому базису?
6. Найти матрицу оператора в новом базисе $\{ \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 ;\ \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 ;\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \}$, если в старом базисе $\{ \mathbf{e}_1 ; \mathbf{e}_2 ; \mathbf{e}_3 \}$ его матрица имеет вид: $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

§ 15. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

- Ненулевой вектор **x** называется собственным вектором линейного оператора $\hat{A}$, если существует такое действительное число λ, что $\hat{A}$x=λx. Число λ называется при этом собственным значением (или собственным числом) оператора $\hat{A}$. В этом случае говорят, что собственный вектор **x** принадлежит собственному значению λ.

Согласно определению, под действием данного оператора $\hat{A}$ его собственный вектор **x** переходит в вектор, коллинеарный самому себе. Другие (несобственные) векторы данного линейного пространства таким свойством не обладают. Очевидно, что если **x** - собственный вектор оператора $\hat{A}$, принадлежащий собственному значению λ, то всякий вектор μ·**x**, коллинеарный вектору **x**, является собственным вектором оператора $\hat{A}$ с тем же собственным значением λ. Действительно, так как $\hat{A}\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, то

$$\hat{A}(\mu \cdot \mathbf{x}) = \mu \cdot \hat{A}\mathbf{x} = \mu \cdot \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x}).$$

Разумеется, не всякое число является собственным значением данного оператора, поэтому рассмотрим вопрос о нахождении собственных значений и принадлежащих им собственных векторов оператора. При этом будем считать, что в линейном пространстве R_n задан базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и известна матрица $\|a_{ik}\|$ оператора $\hat{A}$ в этом базисе.

По определению, $\hat{A}\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ => $\hat{A}\mathbf{x} - \lambda \cdot \mathbf{x} = \theta$. Учитывая, что $\hat{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, последнее равенство можно переписать в виде $\hat{A}\mathbf{x} - \lambda \cdot \hat{E}\mathbf{x} = \theta$ или $(\hat{A} - \lambda \cdot \hat{E})\mathbf{x} = \theta$. Этому операторному равенству соответствует матричное уравнение

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot X = \theta. \tag{39}$$

В развёрнутой форме это можно записать так:

$$\left(\begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix} - \lambda \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}\right) \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

После очевидных упрощений (вычитание матриц и умножение на матрицу-столбец X) это матричное уравнение можно заменить равносильной системой уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) \cdot x_n = 0. \end{cases} \tag{40}$$

Эта однородная система по условию имеет ненулевое решение (так как вектор **x** по определению ненулевой), а для этого необходимо и достаточно, чтобы ее главный определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{41}$$

Выражение (41) представляет собой уравнение степени n относительно λ и называется характеристическим или вековым уравнением. Как известно, уравнение n-й степени имеет ровно n корней (вообще говоря, комплексных), среди которых могут быть и кратные. Вещественные корни характеристического уравнения являются собственными значениями оператора $\hat{A}$. Теперь можно сформулировать

<u>Правило</u>: Чтобы найти собственные векторы данного линейного оператора, нужно составить и решить характеристическое уравнение (41); каждый действительный корень λ_i этого уравнения является собственным значением оператора; принадлежащие данному собственному значению λ_i собственные векторы $\mathbf{a}_i$ (точнее, их координаты) можно найти, решив систему уравнений (40).

v *<u>Пример 29.</u>* Пусть в некотором базисе матрица оператора $\hat{A}$ имеет вид: $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$. Найдем собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Согласно записанному выше правилу, составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, т.е. $\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 5 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = 0$, откуда следует $(1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 10 = 0$ или $\lambda^2 - 5\cdot\lambda - 6 = 0$. Решением этого квадратного уравнения будут числа $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = -1$. Поскольку оба числа действительные, они являются собственными значениями оператора $\hat{A}$. Найдем собственный вектор $\mathbf{a}_1$, принадлежащий собственному значению $\lambda_1 = 6$. Система уравнений (40) в данном случае принимает вид:

$$\begin{cases} (1-6)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + (4-6)x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Она имеет бесчисленное множество решений вида $x_1 = 2\cdot n$, $x_2 = 5\cdot n$, где n - произвольное число. Собственный вектор $\mathbf{a}_1$, принадлежащий собственному значению $\lambda_1 = 6$, имеет в данном базисе координаты $\mathbf{a}_1 = n\cdot\{2; 5\}$. Совершенно аналогично для собственного значения $l_2 = -1$ получим систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}. \quad \text{Её решение} \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = -m \end{cases}, \quad \text{где m – любое число.}$$

Собственный вектор $\mathbf{a}_2 = m\cdot\{1; -1\}$.

Вернёмся теперь к характеристическому уравнению (41). Выражение $\det(A - \lambda\cdot E)$, стоящее в левой части характеристического уравнения, представляет собой многочлен степени n относительно λ. Этот многочлен обозначают обычно $P_n(\lambda)$ и называют характеристическим многочленом данного линейного оператора $\hat{A}$ (или его матрицы).

Очевидно, что степень характеристического многочлена равна размерности пространства, в котором действует данный оператор $\hat{A}$.

Характеристический многочлен обладает свойством инвариантности относительно изменения базиса. Содержание этого утверждения представляет собой теорему

- **<u>Теорема:</u>** В любом базисе характеристический многочлен остаётся неизменным.

Докажем это. В старом базисе $P_n = \det(A - \lambda E)$. В новом базисе матрица оператора изменится и примет вид $A' = C^{-1} \cdot A \cdot C$, где C - матрица перехода. Характеристический многочлен в новом базисе будет иметь вид $P'_n = \det(A' - \lambda E')$. Но единичная матрица E при переходе к новому базису не меняется, так как $E' = C^{-1} \cdot E \cdot C = C^{-1} \cdot C = E$, поэтому можно записать, что

$$P'_n = \det(A' - \lambda E') = \det(C^{-1} \cdot A \cdot C - \lambda \cdot C^{-1} \cdot E \cdot C) = \det[C \cdot (A - \lambda E) \cdot C] =$$
$$= \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det C = \det(A - \lambda E) = P_n$$

Инвариантность характеристического многочлена относительно изменения базиса означает, что его корни, т.е. собственные значения линейного оператора, не зависят от выбора базиса, и в силу этого могут, в некотором смысле, служить характеристикой данного оператора.

- Совокупность всех собственных чисел линейного оператора (с учётом кратности) называется его спектром.
- Спектр оператора называется простым, если его характеристический многочлен имеет только простые (т.е. кратности 1) корни. Собственные векторы линейного оператора также не зависят от выбора базиса (хотя, разумеется, в разных базисах они будут иметь и разные координаты). Можно строго показать, что собственные векторы, при-

надлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.

- Если спектр оператора является простым, то из собственных векторов оператора можно составить базис.

Рассмотрим, как будет выглядеть матрица оператора в базисе из собственных векторов. Для конкретности разберём рассмотренный выше пример 29, т.е. оператор $\hat{A}$, матрица которого в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2\}$ имеет вид: $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$. В качестве новых базисных векторов возьмём собственные векторы оператора $\mathbf{a}_1 = \{2;\ 5\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{1;\ -1\}$. Согласно правилу составления матрицы перехода к новому базису матрица C имеет вид: $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{Vmatrix}$.

Матрица оператора в новом базисе может быть найдена по формуле (37).

Так как $C^{-1} = \dfrac{1}{\det C} \cdot S = -\dfrac{1}{7} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 2 \end{Vmatrix}$, то

$$A' = -\frac{1}{7} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{Vmatrix} = \mathbf{K} = \begin{Vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Возникает вопрос: случайно ли матрица оператора в базисе из собственных векторов получилась диагональной? На него отвечает

- **<u>Теорема:</u>** Для того, чтобы матрица оператора имела диагональный вид, необходимо и достаточно, чтобы векторы базиса были собственными векторами оператора. При этом диагональные элемента матрицы равны собственным числам оператора: $a_{11} = \lambda_1$, $a_{22} = \lambda_2$, ..., $a_{nn} = \lambda_n$.

При доказательстве для простоты ограничимся случаем трёхмерного пространства с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

<u>Необходимость.</u> Пусть матрица оператора $A = \mathrm{Diag}(a_k)$, тогда

$$\begin{aligned}\hat{A}e_1 &= a_{11}\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_3 = a_{11}\cdot e_1\\ \hat{A}e_2 &= 0\cdot e_1 + a_{22}\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_3 = a_{22}\cdot e_2\ .\\ \hat{A}e_3 &= 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + a_{33}\cdot e_3 = a_{33}\cdot e_3\end{aligned}$$

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ - собственные векторы оператора, соответствующие собственным значениям a_{11} , a_{22} , a_{33} .

<u>Достаточность.</u> Пусть $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ - собственные векторы оператора, соответствующие собственным числам a_1 , a_2 , a_3. Тогда

$$\begin{cases}\hat{A}\mathbf{e_1} = a_1\cdot\mathbf{e_1}\\ \hat{A}\mathbf{e_2} = a_2\cdot\mathbf{e_2}\\ \hat{A}\mathbf{e_3} = a_3\cdot\mathbf{e_3}\end{cases} \qquad => \qquad A = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & a_3\end{Vmatrix}.$$

Таким образом, действительно, матрица оператора имеет диагональный вид, и на ее главной диагонали стоят собственные числа оператора. Что и требовалось доказать.

Следствием этой теоремы является сформулированное ниже правило приведения матрицы оператора к диагональному виду.

<u>Правило:</u> Чтобы привести матрицу линейного оператора к диагональному виду, нужно найти собственные числа и собственные векторы оператора. Тогда в базисе из собственных векторов (если он существует) матрица будет иметь диагональный вид, причём по диагонали будут стоять собственные числа оператора.

Подтверждением правила может служить разобранный выше пример.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Что такое характеристический многочлен? Какими свойствами он обладает?
2. Что представляет собой вековое уравнение?
3. Какие векторы называют собственными векторами оператора?
4. Что такое собственные значения матрицы?

5. Найти собственные числа и собственные векторы оператора с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

6. Что представляет собой спектр линейного оператора?

§ 16. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Рассматриваемые до сих пор линейные пространства (они называются аффинными) были лишены метрики, т.е. в них даже не упоминалось о возможности измерения длин и углов между векторами. Для того чтобы ввести метрику в линейном пространстве, проще всего использовать понятие скалярного произведения.

В курсе аналитической геометрии скалярное произведение двух векторов (в виде направленных отрезков) определялось как произведение их длин на косинус угла между ними. В аффинном линейном пространстве у нас нет понятий длины и угла, поэтому скалярное произведение определим аксиоматически, потребовав, чтобы для него выполнялись все известные из аналитической геометрии свойства скалярного произведения "обычных" (геометрических) векторов.

- Линейное пространство, в котором определено скалярное произведение любых двух его элементов, называется евклидовым.

Более точное и развёрнутое определение можно сформулировать так:

- Вещественное линейное пространство R называется евклидовым, если выполнены два условия:

I. Имеется правило, посредством которого любой паре элементов **x** и **y** этого пространства ставится в соответствие действительное число λ, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (**x**,**y**).

II. Указанное правило подчинено аксиомам:

1. (**x**,**y**) = (**y**,**x**) = λ - переместительное свойство
2. (**x**+**y**,**z**) = (**x**,**z**) + (**y**,**z**) - распределительное свойство
3. ($\alpha\cdot$**x**,**y**) = $\alpha\cdot$(**x**,**y**), где α - действительное число
4. (**x**,**x**) ≥ 0
5. (**x**,**x**) = 0 $\Leftrightarrow$ **x** = q**.**

Перечисленные в определении аксиомы тождественны известным из аналитической геометрии свойствам скалярного произведения векторов.

Заметим, что такое определение евклидова пространства не предусматривает конкретного вида правила вычисления скалярного произведения, а также конкретизации правил образования суммы элементов и произведения элемента на число. Необходимо лишь, чтобы эти правила удовлетворяли перечисленным аксиомам скалярного произведения.

Ø **<u>Теорема:</u>** Для любых двух элементов евклидова пространства **x** и **y** справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x},\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Для доказательства заметим, что для любого действительного числа λ в силу аксиомы 4 справедливо неравенство ($\lambda\cdot$ (**x** -**y**), $\lambda\cdot$ (**x** -**y**)) ≥ 0. В силу аксиом 1 и 3 его можно переписать в виде:

$$\lambda^2\cdot(\mathbf{x},\mathbf{x}) - 2\cdot\lambda\cdot(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) \geq 0.$$

Видно, что в левой части этого неравенства стоит квадратный трехчлен относительно λ. Как известно, неотрицательность квадратного трёхчлена означает, что его дискриминант $D \leq 0$. Дискриминант D=4$\cdot$ (**x**,**y**)^2 - 4$\cdot$ (**x**,**x**)$\cdot$ (**y**,**y**), откуда следует (**x**,**y**)^2 $\leq$ (**x**,**x**)$\cdot$ (**y**,**y**). Что и требовалось доказать.

По аналогии с трёхмерным пространством условимся

- Модулем, длиной или нормой вектора называть корень квадратный из скалярного произведения вектора самого на себя: $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

- Если норма вектора равна 1, то вектор называется нормированным.
- Чтобы нормировать произвольный ненулевой вектор **x,** нужно привести его к виду: **e=x/|x|**, т.е. преобразовать в орт.

Неравенство Коши-Буняковского позволяет ввести понятие угла между векторами. Действительно, так как $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x}, \mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, то величина $\left|\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\cdot\sqrt{(\mathbf{y},\mathbf{y})}}\right| \le 1$ и её можно рассматривать как модуль косинуса некоторого угла φ, который можно назвать углом между элементами **x** и **y.**

Итак, угол между двумя ненулевыми элементами линейного пространства может быть определен из соотношения:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \tag{42}$$

Если дополнительно потребовать выполнения условия $0 \le j \le p$, то вычисленное по формуле (42) значение угла будет единственным.

Заметим, что определенное таким способом понятие угла между векторами является формальным и зависит от способа определения скалярного произведения, а в пространстве n измерений, где n>3, вообще лишено привычного геометрического смысла.

Сформулируем определение:

- Векторы **x** и **y** произвольного евклидова пространства называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Действительно, из (37) следует, что при (**x**,**y**)=0 угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

В §5 было введено понятие базиса n-мерного линейного пространства. В случае аффинных пространств все базисы равноправны. В евклидовом пространстве можно выделить особые, так называемые ортонормированные базисы, пользоваться которыми удобнее из-за упрощения вычислений.

• Базис $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots \mathbf{e_n}\}$ n-мерного евклидова пространства называется ортонормированным, если все векторы базиса попарно ортогональны, и норма каждого базисного вектора равна 1.

Математически условие ортонормированности базиса можно записать в виде $(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_k}) = \delta_{ik}$, где δ_{ik} - символ Кронекера, т.е. 0, если $i \neq k$ или 1, если $i = k$.

Удобство пользования ортонормированным базисом проявляется, прежде всего, в простоте вычисления скалярного произведения.

Ø **Теорема:** В ортонормированном базисе скалярное произведение двух любых векторов $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ и $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} x_k y_k \quad . \tag{43}$$

Действительно, так как каждый из элементов **x** и **y** можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots \mathbf{e_n}$, то вычисление скалярного произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ приводит к цепочке равенств:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{\mathbf{i}=1}^{n} x_i \mathbf{e_i} \, , \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} y_k \mathbf{e_k} \right) = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} (x_i \mathbf{e_i}, y_k \mathbf{e_k}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} x_i y_k (\mathbf{e_i}, \mathbf{e_k}) = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} x_i y_k \delta_{ik} = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} x_k y_k \, .$$ Что и требовалось доказать.

В произвольном (не ортонормированном) базисе нам не удалось бы так просто избавиться от двойного суммирования, и формула для вычисления скалярного произведения векторов оказалась бы гораздо сложнее.

Согласно доказанной теореме формула для нормы вектора принимает вид:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\mathbf{n}} x_k^2}$$

• В пространстве с ортонормированным базисом норма вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Рассмотрим скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на какой-либо из базисных ортов $\mathbf{e_k}$. В результате получим:

$$(\mathbf{x},\mathbf{e_k}) = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} (x_i\mathbf{e_i},\mathbf{e_k}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathbf{e_i},\mathbf{e_k}) = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} x_i\delta_{ik} = x_i\,.$$

На основании этого можно сделать вывод, известный из курса аналитической геометрии:

- Координаты произвольного элемента евклидова пространства относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие базисные орты.

В заключение отметим, что в любом n-мерном евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы. Если же исходный базис из векторов $\{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f_n}\}$ не является ортонормированным, то с помощью процесса ортогонализации из него всегда может быть получен ортонормированный базис $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots \mathbf{e_n}\}$. Для этого можно, например, воспользоваться таким алгоритмом: взять $\mathbf{e_1} = \mathbf{f}_1\Big/\sqrt{(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_1)}$, а каждый из последующих базисных векторов определить как $\mathbf{e_i} = \mathbf{q_i}\Big/\sqrt{(\mathbf{q}_i,\mathbf{q_i})}$, где

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{f}_i - (\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_{i-1})\cdot\mathbf{e}_{i-1} - (\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_{i-2})\cdot\mathbf{e}_{i-2} - \ldots - (\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что полученный таким образом базис будет ортонормированным.

Вычисление скалярного произведения в пространстве геометрических векторов знакомо из курса аналитической геометрии. Покажем, как может быть введено понятие скалярного произведения в линейном пространстве функций.

v <u>*Пример 30.*</u> Линейное пространство непрерывных на интервале [a, b] функций $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{v}(x)$, $\mathbf{w}(x)$, … можно сделать евклидовым, если определить скалярное произведение двух любых его элементов равенством:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_a^b \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) \cdot dx$$

В результате вычисления интеграла получим число, которое можно назвать скалярным произведением функций $\mathbf{u}(x)$ и $\mathbf{v}(x)$, так как для него с очевидностью выполняются все аксиомы скалярного произведения. Действительно, легко проверяется, что

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_a^b \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) \cdot dx = \int_a^b \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{u}(x) \cdot dx = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_a^b (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \cdot dx = \int_a^b \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \cdot dx + \int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \cdot dx = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$
- $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_a^b \alpha \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \alpha\int_a^b \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \alpha \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_a^b \mathbf{u}^2(x) \cdot dx \geq 0$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_a^b \mathbf{u}^2(x) \cdot dx = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}(x) = 0$

v *<u>Пример 31.</u>* Пусть задано линейное евклидово пространство непрерывных на интервале [-π, π] функций. Найдем угол между его элементами **sin**x и **cos**x.

Вычислим скалярное произведение:

$$(\mathbf{sin}\ x, \mathbf{cos}\ x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{sin}\ x \cdot \mathbf{cos}\ x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{sin} 2x \cdot dx = -\frac{1}{4}\mathbf{cos} 2x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Так как скалярное произведение элементов равно нулю, функции **sin** x и **cos** x на интервале [-π, π] ортогональны.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Какое пространство называется евклидовым?

2. В разных линейных пространствах понятие скалярного произведения элементов можно вводить по-разному. Можно ли утверждать, что процедура определения скалярного произведения однозначно определяется видом линейного пространства?

3. Что такое норма вектора?

4. Какие векторы называются ортогональными?

5. В чем преимущество ортонормированных базисов перед всеми другими?

6. В линейном евклидовом пространстве функций, непрерывных на интервале [0; 1], где скалярное произведение определено аналогично примеру 20, найти угол между элементами **u** = (x + 2) и **v** = (x – 2).

§ 17. ОПЕРАТОР, СОПРЯЖЕННЫЙ ДАННОМУ. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Прежде всего докажем лемму, т.е. небольшую вспомогательную теорему, необходимую для доказательства основной теоремы.

Ø **<u>Лемма:</u>** Если в евклидовом пространстве R_n для любого вектора $\mathbf{x} \in R_n$ выполняется равенство $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, то **u** = **v**.

Действительно, так как $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$, откуда следует, что $(\mathbf{x}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$.

Для произвольного элемента **x** последнее равенство справедливо только в случае, если **u** – **v** = q, => **u** = **v**. Что и требовалось доказать.

Этот результат потребуется нам в дальнейшем. Дадим определение:

- Линейный оператор $\hat{A}^{+}$ называется сопряжённым по отношению к линейному оператору Â, действующему в том же евклидовом пространстве R_n , если для любых двух векторов **x** и **y** этого пространства выполняется условие: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^{+}\mathbf{y})$.

Заметим, что в силу коммутативности скалярного произведения (аксиома 1) по отношению к оператору $\hat{A}^+$ сопряженным является оператор Â, поэтому операторы $\hat{A}^+$ и Â являются взаимно сопряжёнными.

Установим существование и единственность оператора $\hat{A}^+$, сопряжённого данному оператору Â.

Ø **Теорема:** Если для линейного оператора Â существует сопряженный оператор $\hat{A}^+$, то он единственный.

Доказательство: Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует два оператора $\hat{A}_1^+$ и $\hat{A}_2^+$, сопряжённых данному оператору Â. Тогда по определению (Â**x**, **y**) = (**x**, $\hat{A}_1^+$**y**) и (Â**x**, **y**) = (**x**, $\hat{A}_2^+$**y**), в силу чего (Â**x**, $\hat{A}_1^+$**y**) = (**x**, $\hat{A}_2^+$**y**). Согласно доказанной в начале параграфа лемме это возможно только при условии $\hat{A}_1^+$**y**= $\hat{A}_2^+$**y**, что при произвольности вектора **y** означает: $\hat{A}_1^+ \equiv \hat{A}_2^+ =$ Â. Таким образом, сопряженный оператор является единственным.

Выясним, какой вид должна иметь матрица $\acute{A}^+$ сопряженного оператора $\hat{A}^+$ в ортонормированном базисе {**e₁**, **e₂**, **…e_n**} евклидова пространства R_n. Пусть $A = \|a_{ik}\|$. Обозначим $A^+ = \|b_{jl}\|$. Тогда согласно определению сопряженного оператора для произвольных базисных ортов $\mathbf{e}_p$ и $\mathbf{e}_q$ можно записать:

$$(\acute{A}\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = (\mathbf{e}_p, \acute{A}^+\mathbf{e}_q) \tag{44}$$

Так как $\hat{A}\mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{n} a_{ip}\mathbf{e}_i$, и $\hat{A}^+\mathbf{e}_q = \sum_{j=1}^{n} b_{jq}\mathbf{e}_j$, то

$$(\hat{A}\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ip}\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_q\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ip}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_q) = \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot \delta_{iq} = a_{qp} \ ,$$

и, соответственно,

$$(\mathbf{e}_p, \hat{A}^+\mathbf{e}_q) = \left(\mathbf{e}_p, \sum_{i=1}^{n} b_{jq}\ \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} b_{jq}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{jq} \cdot d_{pj} = b_{pj} \ .$$

В силу (44) $a_{qp} = b_{pq}$, что в общем случае даёт $\mathrm{a_{ik}} = \mathrm{b_{ki}}$, где i, k = 1, 2, …n. Это означает, что $\mathrm{A}^{+} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, на основании чего можно сделать вывод:

- У любого линейного оператора $\hat{\mathrm{A}}$ в евклидовом пространстве существует единственный сопряженный ему оператор $\hat{A}^{+}$, матрица которого A^{+} в ортонормированном базисе является транспонированной по отношению к матрице A.

<u>Свойства сопряженного оператора</u>

1. Тождественный оператор совпадает со своим сопряженным: $\underline{\hat{E}^{+} = \hat{E}}$.

<u>Доказательство</u>: С одной стороны $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\hat{E}\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\hat{E}^{+}\mathbf{y})$, а с другой - $(\hat{E}^{+}\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\hat{E}\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$; => $\hat{E}^{+} = \hat{E}$. Что и требовалось доказать.

2. Оператор, сопряженный сумме операторов, равен сумме сопряженных операторов: $(\hat{A} + \hat{B})^{+} = \hat{A}^{+} + \hat{B}^{+}$.

<u>Доказательство</u>: Пользуясь определением сопряженного оператора и его линейностью, можно записать цепочку равенств:

$(\mathbf{x},(\hat{A} + \hat{B})^{+}\mathbf{y}) = ((\hat{A} + \hat{B})\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\hat{A}\mathbf{x} + \hat{B}\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\hat{B}\mathbf{x},\mathrm{y}) =$
$= (\mathbf{x},\hat{A}^{+}\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\hat{B}^{+}\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\hat{A}^{+}\mathbf{y} + \hat{B}^{+}\mathbf{y}) = (\mathbf{x},(\hat{A}^{+} + \hat{B}^{+})\mathbf{y})$, откуда следует, что

$(\hat{A} + \hat{B})^{+} = \hat{A}^{+} + \hat{B}^{+}$. Что и требовалось доказать.

3. Оператор, сопряженный произведению операторов, равен произведению сопряженных операторов, взятых в обратном порядке: $\underline{(\hat{A}\cdot\hat{B})^{+}} = \underline{\hat{B}^{+}\cdot\hat{A}^{+}}$.

<u>Доказательство</u>: По определению сопряженного оператора

$(\mathbf{x},(\hat{A}\cdot\hat{B})^{+}\mathbf{y}) = ((\hat{A}\cdot\hat{B})\mathbf{x},\mathbf{y})$, но тогда

$((\hat{A}\cdot\hat{B})\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\hat{A}(\hat{B}\mathbf{x}),\mathbf{y}) = (\hat{B}\mathbf{x},\hat{A}^{+}\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\hat{B}^{+}(\hat{A}^{+}\mathbf{y})) =$

$= (\mathbf{x},(\hat{B}^{+}\cdot\hat{A}^{+})\mathbf{y}) \Rightarrow (\hat{A}\cdot\hat{B})^{+} = \hat{B}^{+}\cdot\hat{A}^{+}$. Что и требовалось доказать.

4. Результат последовательного применения к оператору операций обращения и сопряжения не зависит от их порядка: $(\hat{A}^{-1})^{+} = (\hat{A}^{+})^{-1}$.

Доказательство: Так как $(\hat{A}\cdot\hat{A}^{-1})^{+}=\hat{E}^{+}=\hat{E}$, по доказанному свойству 3 можно записать: $(\hat{A}^{-1})^{+}\cdot\hat{A}^{+}=\hat{E}^{+}=\hat{E}$, откуда $(\hat{A}^{-1})^{+}=(\hat{A}^{+})^{-1}$. Что и требовалось доказать.

5. Действительный скалярный множитель можно вынести за знак сопряжения оператора: $\left(\alpha\cdot\hat{A}\right)^{+}=\alpha\cdot\hat{A}^{+}$.

Доказательство: Пользуясь определением сопряжённого оператора и тем фактом, что действительный скалярный множитель α можно выносить за знак скалярного произведения, можно последовательно записать: $(\mathbf{x},(\alpha\cdot\hat{A})^{+}\mathbf{y})=(\alpha\cdot\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha\cdot(\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha\cdot(\mathbf{x},\hat{A}^{+}\mathbf{y})=$
$=(\mathbf{x},\alpha\cdot\mathrm{A}^{+}\mathbf{y})\Rightarrow(\alpha\cdot\hat{A})^{+}=\alpha\cdot\hat{A}^{+}$. Что и требовалось доказать.

6. Взаимно сопряженные операторы имеют одинаковые собственные значения и одинаковые собственные векторы.

Доказательство: Так как матрица сопряжённого оператора в ортонормированном базисе является транспонированной по отношению к матрице исходного, то их характеристические уравнения имеют вид:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix}=0 \quad и \quad \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix}=0.$$

Так как при транспонировании определитель не изменяется, то, раскрыв эти определители, получим одинаковые уравнения, имеющие одинаковые решения. Это означает, что все собственные значения операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^{+}$ совпадают.

Пусть **x** - собственный вектор оператора $\hat{A}$, принадлежащий собственному значению λ. Тогда скалярное произведение

$$(\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{x})=(\lambda\cdot\mathbf{x},\mathbf{x})=(\mathbf{x},\lambda\cdot\mathbf{x}).$$

По определению сопряженного оператора $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^{+}\mathbf{y})$, в силу чего $\hat{A}^{+}\mathbf{x}=\lambda\cdot\mathbf{x}$, т.е. вектор **x** является собственным вектором оператора $\hat{A}^{+}$. Что и требовалось доказать.

<u>Самосопряженный оператор</u>

- Оператор, совпадающий со своим сопряжённым, называется самосопряжённым.

Из определения следует, что если оператор $\hat{A}$ является самосопряжённым, то для любых двух векторов **x** и **y** пространства R_n справедливо равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y})$.

<u>Свойства самосопряженного оператора</u>

1. Матрица самосопряжённого оператора в любом ортонормированном базисе является симметричной (т.е. не меняется при транспонировании).

<u>Доказательство</u>: В ортонормированном базисе $A^{+} = A^{T}$ и $A = A^{+}$, поэтому $A = A^{T}$.

2. Все корни характеристического многочлена самосопряжённого оператора являются действительными.

Для доказательства в общем случае необходимо знание свойств комплексных чисел, поэтому <u>ограничимся</u> лишь <u>проверкой</u> для пространства R_2.

Пусть оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix}$.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{12} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е.}$$

$$(a_{11} - 1)\cdot(a_{22} - 1) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=a_{11}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}^2-4a_{11}a_{22}+4a_{12}^2=$$
$$=(a_{11}^2-2a_{11}a_{22}+a_{22}^2)+4a_{12}^2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geq 0$$

Неотрицательность дискриминанта означает, что корни характеристического многочлена - действительные числа.

3. Собственные векторы самосопряжённого оператора, принадлежащие различным его собственным значениям, ортогональны.

Доказательство: Пусть λ_1 и λ_2 - различные собственные значения оператора $\hat{A}$, а **x** и **y** – соответствующие им собственные векторы.

Тогда $\hat{A}\mathbf{x}=\lambda_1\cdot\mathbf{x}$ *и* $\hat{A}\mathbf{y}=\lambda_2\cdot\mathbf{y}$. По определению самосопряжённого оператора $(\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\hat{A}\mathbf{y})$ или $(\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y})-(\mathbf{x},\hat{A}\mathbf{y})=0$. Но

$$(\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y})-(\mathbf{x},\hat{A}\mathbf{y})=(\lambda_1\cdot\mathbf{x},\mathbf{y})-(\mathbf{x},\lambda_2\cdot\mathbf{y})=(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\mathbf{x},\mathbf{y})=0.$$

Так как по условию $\lambda_1\neq\lambda_2$, то $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$, что означает ортогональность векторов **x** и **y**. Что и требовалось доказать.

4. Матрица самосопряжённого оператора в некотором ортонормированном базисе приводится к диагональному виду.

Чаще всего спектр оператора простой. Тогда в силу свойства 2 он имеет *n* попарно ортогональных (по свойству 3) линейно независимых собственных векторов. Если эти векторы нормировать, то из них можно составить ортонормированный базис, в котором (согласно правилу из §15) его матрица будет иметь диагональный вид. Если спектр оператора не является простым (т.е. характеристическое уравнение имеет кратные корни), ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет диагональный вид, также существует, но этот базис определяется не единственный образом.

5. Сумма самосопряженных операторов является самосопряженным оператором: $(\hat{A}+\hat{B})^+=\hat{A}^++\hat{B}^+=\hat{A}+\hat{B}=(\hat{A}+\hat{B})$. Что и требовалось доказать.

6. Произведение самосопряженного оператора на число является самосопряженным оператором: $(a \cdot \hat{A})^{+} = a \cdot \hat{A}^{+} = a \cdot \hat{A}$. Что и требовалось доказать.

7. Оператор, обратный самосопряжённому, является самосопряжённым: $(\hat{A}^{-1})^{+} = (\hat{A}^{+})^{-1} = \hat{A}^{-1}$.

8. Тождественный оператор является самосопряженным: $\hat{E}^{+} = \hat{E}$.

9. Чтобы произведение самосопряжённых операторов было самосопряжённым оператором, необходимо и достаточно, чтобы операторы коммутировали, т.е. $\hat{A} \cdot \hat{B} = \hat{B} \cdot \hat{A}$.

Действительно, если $(\hat{A} \cdot \hat{B})$ - самосопряжённый оператор, то $(\hat{A} \cdot \hat{B})^{+} = (\hat{A} \cdot \hat{B})$, но $\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)^{+} = \hat{B}^{+} \cdot \hat{A}^{+} = \hat{B} \cdot \hat{A}$, откуда $\hat{A} \cdot \hat{B} = (\hat{B} \cdot \hat{A})$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим весьма поучительную задачу, иллюстрирующую свойство 4 самосопряжённого оператора для случая, когда спектр оператора не является простым.

v *<u>Пример 32 :</u>* Найти собственные значения и собственные векторы

оператора с матрицей $A = \begin{Vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{Vmatrix}$ и указать один из базисов, в котором матрица этого оператора будет иметь диагональный вид.

Заметим, что в силу симметрии матрицы A соответствующий оператор является самосопряжённым и, следовательно, в некотором базисе его матрица может быть приведена к диагональному виду. Для решения поставленной задачи составим характеристическое уравнение det(A - λE) = 0, которое в развернутой форме будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} (6-\lambda) & 2 & 2 \\ 2 & (3-\lambda) & -4 \\ 2 & -4 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, после очевидных алгебраических упрощений получим кубическое уравнение λ^3 - $12\lambda^2$ + 21λ + 98 = 0. Как известно, кубическое уравнение должно иметь три корня (среди которых могут быть и кратные), причем, согласно свойству 2 самосопряженного оператора, все эти корни – действительные числа. В приведенном кубическом уравнении произведение корней равно свободному члену, взятому с обратным знаком, так что $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -98$. Легко убедиться, что в данном случае уравнению удовлетворяют числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 7$.

Каждому собственному значению соответствует хотя бы один собственный вектор (точнее, множество векторов, определяемое с точностью до постоянного множителя).

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$, для чего решим матричное уравнение $(A - \lambda_1 \cdot E) \cdot X = \Theta$. В развернутой

форме оно примет вид: $$\begin{Vmatrix} (6+2) & 2 & 2 \\ 2 & (3+2) & -4 \\ 2 & -4 & (3+2) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

что даст однородную систему уравнений $$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем систему, сократив на 2 первое уравнение и поменяв его местами с последним, и решим её методом Гаусса, для чего придётся записать расширенную матрицу системы и произвести очевидные преобразования:

$$\left\Vert\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right\Vert \Rightarrow \left\Vert\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right\Vert \Rightarrow \left\Vert\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right\Vert.$$

При осуществлении прямого хода метода Гаусса здесь последовательно выполнены следующие действия: из 2-й строки вычли 1-ю, а из 3-ей – удвоенную 1-ю, после чего отбросили одну из одинаковых строк, а оставшуюся разделили на 9. Для реализации обратного хода метода Гаусса заметим, что последняя строка упрощенной матрицы соответствует уравнению $x_2 - x_3 = 0$, откуда получаем условие $x_2 = x_3$. Положим $x_2 = x_3 = 2m$, тогда из условия

$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$ получим $x_1 = - m$. Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = -2$ соответствует собственный вектор **u** с координатами {- m; 2m; 2m}.

Найдем теперь собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 7$. Соответствующая система уравнений может быть записана в виде:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Отбрасывая одно из двух одинаковых уравнений, при осуществлении прямого хода метода Гаусса получим цепочку матриц

$\left\| \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right\|$, откуда следует, что система сводится к одному уравнению: $- x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$.

Принимая в качестве свободных неизвестные x_2 и x_3, и полагая $x_2 = k$, а $x_3 = n$, приходим к выводу, что $x_1 = 2k + 2n$. Таким образом, собственному значению $\lambda = 7$ соответствует собственный вектор с координатами {2(k +n); k; n}, где k и n – произвольные числа.

Легко заметить, что при надлежащем выборе числовых параметров k и n (конкретно при k=0, n=1 и k=1, n=0) получим два линейно независимых вектор-решения **v**={2; 0; 1} и **w**={2; 1; 0}, образующие фундаментальную систему решений.

Для приведения матрицы оператора к диагональному виду попробуем составить базис из собственных векторов

$\mathbf{u}=\{-1;2;2\}$, $\mathbf{v}=\{2;0;1\}$ и $\mathbf{w}=\{2;1;0\}$.

Предварительно убедимся, что эти векторы действительно можно принять в качестве базисных элементов линейного пространства в силу их линейной независимости. Для этого рассмотрим матрицу B из их координат и определим её ранг методом приведения к ступенчатому виду. Необходимые преобразования приведены ниже и практически не требуют комментариев:

$$B=\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 9\end{Vmatrix}.$$

Так как число линейно независимых строк равно трем, то RgB = 3, что совпадает с размерностью пространства. Поэтому три собственных вектора **u**, **v** и **w** можно принять в качестве базисных. Составим матрицу перехода к новому базису $C=\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{Vmatrix}$ и найдём для неё обратную:

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot S=\frac{1}{9}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 5\\ 2 & 5 & -4\end{Vmatrix}.$$

Матрицу A' оператора A в новом базисе можно найти по формуле:

$$A'=C^{-1}\cdot A\cdot C=\frac{1}{9}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 5\\ 2 & 5 & -4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}6 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -4\\ 2 & -4 & 3\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 5\\ 2 & 5 & -4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & 14 & 14\\ -4 & 0 & 7\\ -4 & 7 & 0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{Vmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, она имеет диагональный вид, причем диагональные элементы – собственные числа оператора.

<u>Замечание</u>: В комплексном пространстве оператор, сопряженный данному, называют эрмитовосопряжённым, а самосопряжённый опера-

тор – просто эрмитовым. Эти понятия находят широкое применение прежде всего в квантовой механике.

<u>Контрольные вопросы и задания:</u>

1. Какой оператор называется сопряженным данному?
2. Перечислите свойства сопряжённого оператора.
3. Как найти элементы матрицы сопряжённого оператора?
4. Какой оператор называется самосопряженным?
5. Какими свойствами обладает самосопряженный оператор?

§ 18. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И МАТРИЦЫ

- Линейный оператор $\hat{A}$ в вещественном евклидовом пространстве R называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение любых двух его векторов, т.е. $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in R$, $\mid$ $(\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Из определения следует, что ортогональный оператор сохраняет длины векторов и углы между ними.

<u>Замечание</u>: *Аналогом ортогонального оператора в случае комплексного пространства является так называемый унитарный оператор.*

Какие условия должны выполняться, чтобы оператор $\hat{A}$ был ортогональным? Так как для ортогонального оператора $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y})$, то по определению сопряженного оператора $(\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^{+}(\hat{A}\mathbf{y}))$, откуда по лемме из §17 следует, что $\hat{A}^{+} \cdot \hat{A} = \hat{E}$, и, следовательно, $\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{+}$. Таким образом, доказана теорема:

- Для того, чтобы линейный оператор $\hat{A}$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы сопряжённый ему оператор $\hat{A}^{+}$ совпадал с обратным $\hat{A}^{-1}$.

Отсюда следует, что ортогональный оператор всегда невырожденный, т.е. $\det A \neq 0$, так как для него должна существовать обратная матрица.

<u>Свойства ортогональных операторов</u>

1. Тождественный оператор является ортогональным.

Так как по определению обратного оператора $\hat{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ и $\hat{E}\mathbf{y} = \mathbf{y}$, то $(\hat{E}\mathbf{x}, \hat{E}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, что и требовалось доказать.

2. Произведение ортогональных операторов является ортогональным оператором. Действительно, в силу ортогональности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ $(\hat{A}\cdot\hat{B}x, \hat{A}\cdot\hat{B}y) = (\hat{A}(\hat{B}x), \hat{A}(\hat{B}y)) = (\hat{B}x, \hat{B}y) = (x, y)$.

3. Оператор, обратный ортогональному, является ортогональным. Из условия ортогональности $\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{+1}$. Но по известному свойству сопряженного оператора $(\hat{A}^{-1})^{+} = (\hat{A}^{+})^{-1} = (\hat{A}^{-1})^{-1} = (\hat{A})$, что и завершает доказательство, так как $\hat{A}$ - ортогональный оператор.

4. Если $\hat{A}$ - ортогональный оператор, то произведение $\alpha\cdot\hat{A}$ будет ортогональным оператором только при условии $\alpha = \pm 1$.

Действительно, условие $(a\cdot\hat{A}\mathbf{x}, a\cdot\hat{A}\mathbf{y}) = a^2\cdot(\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}) = a^2\cdot(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$ выполнимо только при $\alpha^2 = 1$, откуда $\alpha = \pm 1$.

5. Ортогональный оператор переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный.

Это следствие того, что ортогональный оператор сохраняет длины векторов и углы между ними.

6. Все собственные значения ортогонального оператора равны по модулю 1.

Пусть **x** - собственный вектор оператора $\hat{A}$. Тогда $\hat{A}\mathbf{x} = l\mathbf{x}$ и для собственного вектора **x** в силу ортогональности $\hat{A}$ можно записать: $(\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})$ или $(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})$, откуда $\lambda^2\cdot(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})$, что справедливо только при условии $|\lambda| = 1$, так как $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \neq 0$.

7. Матрица A ортогонального оператора удовлетворяет соотношению $A^{-1} = A^{T}$. Действительно, так как $A^{+} = A^{T}$, из условия ортогональности оператора $\hat{A}^{+} = \hat{A}^{-1}$ следует, что $A^{T} = A^{-1}$.

<u>Ортогональная матрица</u>

- Матрица, для которой операции транспонирования и обращения дают одинаковый результат, называется ортогональной.

По определению условие ортогональности матрицы имеет вид: $A^{-1} = A^{T}$.

<u>Свойства ортогональной матрицы</u>

1. Квадрат определителя ортогональной матрицы равен 1.

Так как по определению $A^{-1} \cdot A = E$, то $\mathrm{Det}(A^{-1} \cdot A) = \mathrm{Det}E = 1$, но в силу ортогональности $A^{-1} = A^{T}$, поэтому имеем цепочку равенств

$$\mathrm{Det}(A^{-1} \cdot A) = \mathrm{Det}(A^{T} \cdot A) = \mathrm{Det}A^{T} \cdot \mathrm{Det}A = (\mathrm{Det}A)^{2} = 1$$

2. Сумма произведений элементов двух различных строк ортогональной матрицы равна нулю, а сумма квадратов элементов каждой строки равна единице.

Это означает, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk} = \delta_{ik}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots n \tag{45}$$

Для доказательства заметим, что так как $A^{T} \cdot A = E$, то, согласно правилу умножения матриц, каждый элемент e_{ij} матрицы E можно найти как

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a^{T}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk}$$

Но $e_{ij} = \delta_{ik}$**,** откуда следует **(**45**) .** Соотношения (45) можно назвать условием ортогональности для строк.

<u>Замечание:</u> Поскольку при транспонировании ортогональной матрицы A получается также ортогональная матрица A^{T}, то столбцы матрицы A (или строки A^{T}) тоже удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk} = d_{ik}, \qquad k, j = 1, 2, \ldots n \tag{46}$$

Соотношения (45) или (46) можно рассматривать как признак ортогональности матрицы.

- **Теорема:** Для того, чтобы матрица А была ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы её строки или столбцы удовлетворяли соотношениям ортогональности.

Доказательство теоремы фактически приведено выше. В качестве примера ортогонального оператора можно рассмотреть оператор поворота в пространстве R_2 (см. Пример 14).

Контрольные вопросы и задания:

1. Что такое ортогональный оператор?
2. Перечислите свойства ортогонального оператора.
3. Можно ли утверждать, что ортогональный оператор является взаимно однозначным (т.е. одинаковым образам, порожденным этим оператором, соответствуют одинаковые прообразы)?
4. Как по виду матрицы оператора установить его ортогональность?
5. Перечислите свойства ортогональной матрицы.

§19. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ПРИВЕДЕНИЕ ИХ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

- Квадратичной формой относительно переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называется многочлен второй степени, однородный относительно этих переменных (т.е. не содержащий свободного члена и первых степеней переменных). Условимся обозначать квадратичную форму буквой F.

Например, в двухмерном пространстве

$$F(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 .$$

В пространстве трёх измерений квадратичная форма имеет вид:

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 .$$

- Числа a_{ik}, задание которых определяет форму, называют коэффициентами квадратичной формы (при этом вместо a_{ik} можно писать a_{ki}, считая, что $a_{ik} = a_{ki}$).

Упорядоченную совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ можно рассматривать как координаты некоторой точки M в n-мерном пространстве, а число F - как значение квадратичной формы в точке M.

Для определенности далее будем считать, что квадратичная форма задана в трёхмерном пространстве, хотя все полученные результаты будут справедливы в пространстве любого числа измерений. Учитывая, что $a_{ik} = a_{ki}$, квадратичную форму F можно записать в виде:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \tag{47}$$

Предлагаемый подход интерпретации переменных x_1, x_2, x_3 как координат некоторой точки неявно предполагает, что в пространстве задан базис. Введем понятие матрицы квадратичной формы в заданном базисе:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix} .$$

Ввиду симметричности матрицы A можно считать, что матрица квадратичной формы представляет собой матрицу некоторого самосопряжённого оператора $\hat{A}$. Воздействие этого оператора на вектор $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ переводит его в новый вектор $\mathbf{x}' = \{x_1', x_2', x_3'\}$, где

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

так что **x**¢=Â**x**. Легко видеть, что квадратичная форма равна скалярному произведению векторов **x** и **x**¢, т.е. F=(**x, x**¢**).** Итак, квадратичная форма - это скалярное произведение прообраза вектора на его образ в заданном базисе. В матричной форме это можно записать как $F=X^{T}\cdot A\cdot X$, или в развёрнутом виде:

$$F = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix},$$

откуда непосредственно получается (47).

При переходе к новому базису координаты вектора и матрица оператора меняются. Меняется и квадратичная форма. Для каждой квадратичной формы существуют базисы, в которых она записывается наиболее просто.

- Если квадратичная форма не содержит произведения переменных, то говорят, что она имеет канонический вид.

Можно строго доказать, что всякая квадратичная форма при помощи невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду (это утверждение составляет суть теоремы Лагранжа). Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [1].

Метод Лагранжа является прямым элементарным способом приведения квадратичной формы к каноническому виду. Проиллюстрируем это примером.

v *Пример 33:* Привести к каноническому виду квадратичную форму трех переменных:

$$F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

Сгруппируем члены, содержащие x_1, и выделим полный квадрат:

$$F = 2\,(x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 + x_2^2/4 + x_3^2) - x_2^2/2 - 2x_3^2 +$$

$$+ 2x_2x_3 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3 = 2(x_1 - x_2/2 + x_3)^2 + 5x_2^2/2 + 2x_3^2 - x_2x_3$$

В полученном выражении сгруппируем теперь члены, содержащие x_2, и тоже выделим полный квадрат:

$$F = 2(x_1 - x_2/2 + x_3)^2 + 5(x_2^2 - 2x_2x_3/5 + x_3^2/25)/2 - x_3^2/10 + 2x_3^2 =$$

$$= 2(x_1 - x_2/2 + x_3)^2 + 5(x_2 - x_3/5)^2/2 + 19x_3^2/10$$

Введем новые переменные:

$$u_1 = (x_1 - x_2/2 + x_3)^2; \quad u_2 = (x_2 - x_3/5); \qquad u_3 = x_3.$$

В новых обозначениях квадратичная форма F будет иметь канонический вид: $F = 2u_1^2 + 5u_2^2 + 19u_3^2/10$.

Возможен и иной подход в вопросе приведения квадратичной формы к каноническому виду, использующий ту же идею. Так как матрица квадратичной формы канонического вида симметрична (в этом случае при $i \neq k$ имеем $a_{ik} = 0$), то её можно рассматривать как матрицу самосопряжённого оператора, которая в некотором ортогональном базисе всегда приводится к диагональному виду:

$$A' = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}.$$

Действительно, рассматривая матрицу квадратичной формы как матрицу оператора и пользуясь формулой перехода от старого базиса к новому, получим:

$$F' = (X')^{T} \cdot A' \cdot X' = \begin{Vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \lambda_1 x_1' & \lambda_2 x_2' & \lambda_3 x_3' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \lambda_3 (x_3')^2 .$$

На основании этого можно сформулировать

- **Правило:** Для того чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду, нужно найти собственные числа и собственные векторы матрицы квадратичной формы и составить ортонормированный базис из собственных векторов; в этом базисе квадратичная форма будет иметь канонический вид: $F = \lambda_1 \cdot (x_1')^2 + \lambda_2 \cdot (x_2')^2 + \lambda_3 \cdot (x_3')^2$.

Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду прежде всего находят приложение в аналитической геометрии, когда встает задача приведения к каноническому виду уравнения кривой или поверхности второго порядка. Известно, что общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{48}$$

Группа старших членов $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ является квадратичной формой переменных x и y с матрицей $A = \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}$, которая приводится к диагональному виду с помощью перехода к новому ортонормированному базису, составленному из собственных векторов матрицы A. Уравнение (48) может быть записано в матричной форме в виде:

$$\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2D & 2E \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + F = 0. \tag{49}$$

После перехода к новому базису с помощью матрицы перехода

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}$$

координаты x и y изменятся на x' и y', причём согласно формуле (35) можно записать: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix}$.

Теперь уравнение (49) может быть записано в виде

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + \begin{Vmatrix} 2D & 2E \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix} + F = 0, \qquad (50),$$

где λ_1 и λ_2 - собственные значения матрицы A квадратичной формы.

Выделением полных квадратов уравнение (50) может быть приведено к виду, определяющему каноническое уравнение кривой второго порядка либо какой-то случай распадения или вырождения кривой.

Выясним, какой геометрический смысл имеют проведённые операции. Так как матрица C является ортогональной, то переход к новому базису означает просто поворот системы координат xOy (возможно, с инверсией осей). Действительно, поворот и инверсия исчерпывают преобразования пространства R_2 (плоскости), которые сохраняют длины векторов и углы между ними (ортогональные преобразования) и**,** следовательно, не могут изменить форму кривой.

Выделение полных квадратов в уравнении (50) означает параллельный перенос начала координат в точку O' с координатами $(x'_0;\ y'_0)$ относительно повернутой с помощью оператора $\mathcal{C}$ системы координат $x'Oy'$, т.е. переход в систему координат $x''O'y''$.

v _Пример 34:_ Пусть дано уравнение второго порядка:

$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$. Нужно привести его к каноническому виду и, по возможности, построить на плоскости кривую, которую оно определяет.

Матрица квадратичной формы старших членов уравнения имеет вид:

$$A = \begin{Vmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Составим ее характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} (17-\lambda) & 6 \\ 6 & (8-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \text{ , } \Rightarrow \lambda^2 - 25\lambda - 100 = 0 .$$

Его корни (собственные значения матрицы A): $\lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = 5$.

Найдём собственный вектор матрицы $\mathbf{u} = \{u_1; u_2\}$, принадлежащий собственному значению $\lambda_1 = 20$, для чего составим и решим матричное уравнение:

$$\begin{Vmatrix} (17-20) & 6 \\ 6 & (8-20) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3u_1 + 6u_2 = 0 \\ 6u_1 - 12u_2 = 0. \end{cases}$$

Решение системы имеет вид $u_1 = 2t$, $u_2 = t$, где t - произвольное число. Собственный вектор $\mathbf{u} = \{2t;\ t\}$ после нормировки дает орт $\mathbf{e_1} = \{2/\sqrt{5};\ \ 1/\sqrt{5}\}$**.**

Аналогично найдём собственный вектор $\mathbf{v} = \{v_1\,; v_2\}$ принадлежащий собственному значению $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{Vmatrix} (17-5) & 6 \\ 6 & (8-5) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3v_1 + 6v_2 = 0 \\ 6v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}.$$

Полученная система сводится к одному уравнению вида $2v_1+v_2=0$, откуда следует, что собственный вектор **v** имеет координаты {-m; 2m}, где m - произвольное число. После нормирования вектора **v** получим орт $\mathbf{e}_2 = \{-1/\sqrt{5};\ 2/\sqrt{5}\}$.

Составим матрицу перехода C от старого базиса $\{\mathbf{i}\,, \mathbf{j}\}$ к новому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_1\,; \mathbf{e}_2\}$, для чего запишем в соответствующие столбцы координаты новых базисных ортов:

$$C = \begin{Vmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{Vmatrix}.$$

Тогда исходное уравнение второго порядка примет вид (см. Формулу (50)):

$$20(x')^2 + 5(y')^2 + \begin{Vmatrix} 20\sqrt{5} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + 20 = 0$$

После умножения матриц это даст: $20(x')^2 + 5(y')^2 + 40x' - 20y' + 20 = 0.$

Выделяя полные квадраты, получим:

$$20((x')^2 + 2x' + 1) + 5((y')^2 - 4y' + 4) - 20 = 0,$$

что после очевидных упрощений позволит записать:

$$\frac{(x'+1)^2}{1} + \frac{(y'-2)^2}{4} = 1.$$

После переноса начала координат в точку $O'(-1;\ 2)$, уравнение принимает канонический вид: $\dfrac{(x'')^2}{1}+\dfrac{(y'')^2}{4}=1$ и определяет эллипс с полуосями $a=1,\ b=2$, изображенный на рис. 3, где показаны также старые и новые координатные оси.

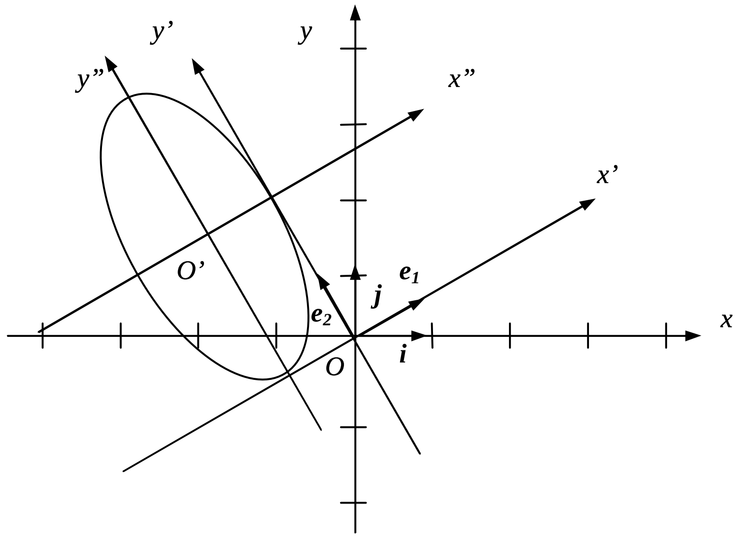


Рис. 3.

Аналогичным образом приводятся к каноническому виду уравнения поверхностей второго порядка.

<u>Замечание</u>: Существуют квадратичные формы, для которых канонический вид определяется не единственным образом.

В заключение отметим, что методы приведения квадратичных форм к каноническому виду отнюдь не исчерпываются рассмотренными в данном пособии.

<u>Контрольные вопросы и задания</u>:

1. Что такое квадратичная форма?
2. Записать квадратичную форму переменных x_1, x_2, x_3, заданную матрицей

$$A=\begin{Vmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{Vmatrix}.$$

3. Какой вид квадратичной формы называется каноническим?
4. Какие методы приведения квадратичной формы к каноническому виду Вам известны?
5. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму $F = (x_1)^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - (x_3)^2$
6. Для решения каких геометрических задач применяют приведение квадратичной формы к каноническому виду?
7. С помощью ортогонального преобразования привести уравнение кривой второго порядка $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$ к каноническому виду и построить её, указав старые и новые координатные оси.

Рекомендуемая литература:

1. В.А. Ильин, Э. Г. Позняк. Линейная алгебра. – М: Наука, 1984. – 295с.
2. П.С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
3. О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. Курс высшей математики: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – М.: Высшая школа, 1986. – 480 с.
4. Л.И. Головина. Линейная алгебра и некоторые её приложения. – М.: Наука, 1979. - 320 с.
5. З.И. Боревич. Определители и матрицы. – М.: Наука, 1988. – 184 с.
6. Р.Ф. Апатенок, А.М. Маркина, Н.В. Попова, В.В. Хейнман. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Высшая школа, 1986. – 272 с.
7. А.А. Гусак. Справочное пособие по решению задач: Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 288 с.
8. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I. – М.: Высшая школа, 1980. – 320 с.
9. И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. – 7-е изд. – М.: Наука, 1984. - 336 с.
10. И.В. Белоусов. Матрицы и определители: учебное пособие по линейной алгебре. – Кишинев, 2006. – 101 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное пособие

Коваленко Андрей Андреевич

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

для студентов физических факультетов педагогических вузов

Подписано в печать 09.04.2010 г.