

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	10
<b>Глава 1. Функция</b>	11
§ 1.1. Первоначальные сведения о функции	11
1.1.1. Функции и способы их задания	11
1.1.2. Сложные и неявно заданные функции	13
§ 1.2. Простейшие свойства функций	14
1.2.1. Область определения функции	14
1.2.2. Элементы поведения функции	17
§ 1.3. Элементарные функции. Обратная функция	19
<b>Глава 2. Предел. Непрерывность</b>	30
§ 2.1. Основные определения	30
2.1.1. Функции целочисленного аргумента	30
2.1.2. Функции непрерывного аргумента	32
§ 2.2. Бесконечные величины. Признаки существования предела	32
2.2.1. Бесконечные величины	32
2.2.2. Признаки существования предела	35
§ 2.3. Непрерывные функции	35
§ 2.4. Нахождение пределов. Сравнение бесконечно малых	38
2.4.1. Функции целочисленного аргумента	38
2.4.2. Функция непрерывного аргумента	39
2.4.3. Сравнение бесконечно малых	45
2.4.4. Некоторые геометрические задачи	47
2.4.5. Вычислительные задачи	50
<b>Глава 3. Производная и дифференциал. Дифференциальное исчисление</b>	51
§ 3.1. Производная. Скорость изменения функции	51
3.1.1. Некоторые задачи физики	51
3.1.2. Производная функция	53
3.1.3. Геометрический смысл производной	54
§ 3.2. Дифференцирование функций	55
3.2.1. Степенные функции	56
3.2.2. Тригонометрические функции	58
3.2.3. Обратные тригонометрические функции	60
3.2.4. Логарифмические функции	60
3.2.5. Показательные функции	61

3.2.6.	Гиперболические функции	62
3.2.7	Логарифмическое дифференцирование	63
3.2.8	Разные функции	63
3.2.9	Обратные функции	67
3.2.10.	Функции, заданные неявно	68
3.2.11	Применения производной	69
§ 3.3	Дифференциал Дифференцируемость функции	75
3.3.1	Дифференциал	76
3.3.2	Дифференцируемость функций	79
§ 3.4	Производная как скорость изменения (дальнейшие примеры)	80
3.4.1.	Относительная скорость	80
3.4.2.	Функции, заданные параметрически	82
3.4.3.	Скорость изменения полярного радиуса	85
3.4.4.	Скорость изменения длины	86
3.4.5.	Скорость движения	87
§ 3.5.	Повторное дифференцирование	87
3.5.1.	Функции, заданные в явном виде	87
3.5.2.	Функции, заданные в неявном виде	90
3.5.3.	Функции, заданные параметрически	90
3.5.4.	Ускорение движения	91
3.5.5.	Формула Лейбница	92
3.5.6.	Дифференциалы высших порядков	93
<i>Глава 4.</i>	<i>Исследование функций и их графиков</i>	95
§ 4.1.	Поведение функции	95
§ 4.2.	Применение первой производной	96
4.2.1.	Теоремы Ролля и Лагранжа	96
4.2.2.	Поведение функций в интервале	99
4.2.3.	Неравенства	101
4.2.4	Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций	101
§ 4.3.	Применение второй производной	108
4.3.1.	Экстремумь.	108
4.3.2.	Выпуклость, вогнутость, точки перегиба	108
§ 4.4.	Дополнительные вопросы. Решение уравнений	112
4.4.1.	Теорема Коши и правило Лопиталья	112
4.4.2.	Асимптотическое изменение функций и асимптоты линий	115
4.4.3	Общее исследование функций и линий	116
4.4.4	Решение уравнений	119
§ 4.5.	Формула Тейлора и ее применение	121
4.5.1.	Формула Тейлора для многочленов	121
4.5.2.	Формула Тейлора	122
4.5.3.	Некоторые применения формулы Тейлора	122
§ 4.6.	Кривизна	123

Глава 5.	Определенный интеграл	128
§ 5.1.	Определенный интеграл и его простейшие свойства	128
5.1.1.	Вычисление интегралов суммированием	131
§ 5.2.	Основные свойства определенного интеграла	133
5.2.1.	Геометрическая интерпретация определенного интеграла	133
5.2.2.	Оценка интеграла	133
5.2.3.	Среднее значение функции	134
5.2.4.	Интеграл с переменным пределом	135
5.2.5.	Формула Ньютона–Лейбница	137
Глава 6.	Неопределенный интеграл. Интегральное исчисление	139
§ 6.1.	Простейшие приемы интегрирования	139
§ 6.2.	Основные методы интегрирования	144
6.2.1.	Интегрирование по частям	144
6.2.2.	Замена переменной	146
6.2.3.	Разные задачи	147
§ 6.3.	Основные классы интегрируемых функций	150
6.3.1.	Дробно-рациональные функции	150
6.3.2.	Некоторые иррациональные функции	153
6.3.3.	Тригонометрические функции	154
6.3.4.	Гиперболические функции	156
6.3.5.	Рациональные функции от $x$ и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	157
6.3.6.	Разные функции	158
Глава 7.	Способы вычисления определенных интегралов	
	Несобственные интегралы	160
§ 7.1.	Способы точного вычисления интегралов	160
7.1.1.	Непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница	160
7.1.2.	Замена переменной в определенном интеграле	162
7.1.3.	Разные задачи	163
§ 7.2.	Приближенные методы	167
§ 7.3.	Несобственные интегралы	170
7.3.1.	Интегралы с бесконечными пределами	170
7.3.2.	Интегралы от функций с бесконечными разрывами	171
7.3.3.	Разные задачи	172
Глава 8.	Применения интеграла	175
§ 8.1.	Некоторые задачи геометрии и статики	175
8.1.1.	Площадь фигуры	175
8.1.2.	Длина линии	180
8.1.3.	Объем тела	183
8.1.4.	Площадь поверхности вращения	188
8.1.5.	Моменты и центр масс	190
8.1.6.	Теоремы Гульдина	194
§ 8.2.	Некоторые задачи физики	195

<i>Глава 9</i>	Ряды	207
§ 9.1.	Числовые ряды	207
9.1.1.	Сходимость числового ряда	207
9.1.2.	Ряды с положительными членами	208
9.1.3.	Ряды с произвольными членами	211
	Абсолютная сходимость	212
§ 9.2.	Функциональные ряды	212
9.2.1.	Сходимость функциональных рядов	212
9.2.2.	Равномерная (правильная) сходимость	212
9.2.3.	Интегрирование и дифференцирование рядов	214
§ 9.3.	Степенные ряды	216
9.3.1.	Разложение функции в степенные ряды	216
9.3.2.	Интервал сходимости	218
§ 9.4.	Некоторые применения рядов Тейлора	219
9.4.1.	Вычисления приближенных значений функций	219
9.4.2.	Решение уравнений	220
9.4.3.	Интегрирование функций	221
9.4.4.	Разные задачи	222
<i>Глава 10.</i>	Функции нескольких переменных.	
	Дифференциальное исчисление	223
§ 10.1.	Функции нескольких переменных	223
§ 10.2.	Простейшие свойства функции	225
10.2.1.	Область определения	225
10.2.2.	Предел. Непрерывность функции	227
10.2.3.	Линии и поверхности уровня	228
§ 10.3.	Производные и дифференциалы функций нескольких переменных	230
10.3.1.	Частные производные	230
10.3.2.	Дифференциалы. Приближенные вычисления	233
10.3.3.	Применения к вычислениям	234
§ 10.4.	Дифференцирование функций	235
10.4.1.	Сложная функция	235
10.4.2.	Неявно и параметрически заданные функции	236
§ 10.5.	Повторное дифференцирование	238
10.5.1.	Замена переменных	241
<i>Глава 11.</i>	Применения дифференциального исчисления функций нескольких переменных	243
§ 11.1.	Формула Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных	243
11.1.1.	Формула Тейлора	243
11.1.2.	Экстремумы	244
11.1.3.	Наибольшие и наименьшие значения	246
11.1.4.	Условные экстремумы	247
§ 11.2.	Плоские линии	250
11.2.1.	Касательные и нормали	250

11.2.2. Особые точки	250
11.2.3. Огибающие	250
§ 11.3. Векторная функция скалярного аргумента. Линии в пространстве. Поверхности	252
11.3.1. Векторная функция скалярного аргумента	252
11.3.2. Пространственные линии	254
11.3.3. Длина дуги пространственной линии	256
11.3.4. Поверхности	256
§ 11.4. Скалярное поле. Градиент Производная по направлению	259
11.4.1. Градиент	259
11.4.2. Производная по направлению	260
<i>Глава 12. Многомерные интегралы и кратное интегрирование</i>	262
§ 12.1. Двойные и тройные интегралы	262
§ 12.2. Кратное интегрирование	263
12.2.1. Двойной интеграл. Прямоугольная область	263
12.2.2. Двойной интеграл. Произвольная область	264
12.2.3. Тройной интеграл	266
§ 12.3. Интегралы в полярных, цилиндрических и сферических координатах	267
12.3.1. Двойной интеграл	267
12.3.2. Тройной интеграл	269
§ 12.4. Применение двойных и тройных интегралов	270
12.4.1. Объем тела. I	270
12.4.2. Площадь плоской фигуры	272
12.4.3. Объем тела. II	273
12.4.4. Площадь поверхности	274
12.4.5. Моменты и центр масс	275
12.4.6. Разные задачи	279
§ 12.5. Несобственные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра	282
12.5.1. Несобственные двойные и тройные интегралы	282
12.5.2. Интегралы, зависящие от параметра. Правило Лейбница	284
12.5.3. Разные задачи	286
<i>Глава 13. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности</i>	288
§ 13.1. Криволинейные интегралы по длине	288
13.1.1. Вычисление интегралов	288
13.1.2. Применения интегралов	289
§ 13.2. Криволинейные интегралы по координатам	291
13.2.1. Вычисление интегралов	291
13.2.2. Формула Грина	293
13.2.3. Независимость интеграла от контура интегрирования. Отыскание первообразной	294

13.2.4. Применения интегралов	296
13.2.5. Работа	297
§ 13.3. Интегралы по поверхности	298
13.3.1. Интегралы по площади поверхности	298
13.3.2. Поверхностные интегралы по координатам	299
13.3.3. Формула Стокса	300
13.3.4. Формула Остроградского	301
<i>Глава 14. Дифференциальные уравнения</i>	302
§ 14.1. Уравнения первого порядка	302
14.1.1. Уравнения с разделяющимися переменными	302
14.1.2. Однородные уравнения	305
14.1.3. Линейные уравнения	306
14.1.4. Разные задачи (уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные)	308
14.1.5. Другие примеры уравнений первого порядка	313
14.1.6. Уравнения в полных дифференциалах	314
14.1.7. Интегрирующий множитель	314
14.1.8. Разные задачи	315
§ 14.2. Уравнения первого порядка (продолжение)	316
14.2.1. Поле направлений. Изоклины	316
14.2.2. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений	317
14.2.3. Особые решения. Уравнения Клеро и Лагранжа	319
14.2.4. Ортогональные и изогональные траектории и эвольвенты	320
§ 14.3. Уравнения второго и высших порядков	321
14.3.1. Частные случаи уравнений второго порядка	321
14.3.2. Частные случаи уравнений более высоких порядков	324
14.3.3. Приближенные решения	324
§ 14.4. Линейные уравнения	326
14.4.1. Уравнения с постоянными коэффициентами	328
14.4.2. Уравнения высших порядков	333
§ 14.5. Системы дифференциальных уравнений	334
§ 14.6. Вычислительные задачи	338
<i>Глава 15. Тригонометрические ряды</i>	340
§ 15.1. Тригонометрические многочлены	340
§ 15.2. Ряды Фурье	341
§ 15.3. Метод Крылова. Гармонический анализ	345
<i>Глава 16. Элементы теории поля</i>	347
§ 16.1. Векторное поле, дивергенция и ротор	347
§ 16.2. Потенциал	350
§ 16.3. Потенциал силы притяжения	351
§ 16.4. Поток и циркуляция (плоский случай)	353
§ 16.5. Поток и циркуляция (пространственный случай)	354

<i>Ответы</i>	355
К главе 1	355
К главе 2	360
К главе 3	366
К главе 4	385
К главе 5	400
К главе 6	403
К главе 7	419
К главе 8	425
К главе 9	432
К главе 10	438
К главе 11	447
К главе 12	454
К главе 13	463
К главе 14	466
К главе 15	483
К главе 16	485
<i>Решения</i>	488
К главе 1	488
К главе 2	491
К главе 3	497
К главе 4	512
К главе 5	526
К главе 6	528
К главе 7	539
К главе 8	543
К главе 9	552
К главе 10	556
К главе 11	562
К главе 12	570
К главе 13	582
К главе 14	586
К главе 15	601
К главе 16	603